Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 0 **Wintersemester 2007/08**

Aufgabe 1 (Zariski-Topologie)

Als *algebraische Menge* im $\mathbb{C}^n$ bezeichnet man eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{C}^n$, die die gemeinsame Nullstellenmenge einer Familie von Polynomen $\{f_\alpha\}$ aus $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist:

$$Z = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_\alpha(x) = 0 \text{ für alle } \alpha\}.$$

Die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{C}^n$ ist diejenige Topologie, deren abgeschlossene Mengen genau die algebraischen Mengen sind.

(a) Zeigen Sie, dass durch diese Definition tatsächlich eine Topologie definiert wird.

(b) Sind Zariski-abgeschlossene (bzw. Zariski-offene) Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ auch abgeschlossen (bzw. offen) in der Standardtopologie des $\mathbb{C}^n$?

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppe der invertierbaren Matrizen,

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) \neq 0\},$$

eine Zariski-offene Menge in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist. Wie lässt sich $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ als Nullstellenmenge einer polynomialen Gleichung darstellen?

Aufgabe 2 (Jordan-Zerlegung)

Eine Matrix mit Einträgen aus dem Körper K heißt *halbeinfach* (engl. *semisimple*), wenn sie über dem algebraischen Abschluss von K diagonalisierbar ist (im Falle $K = \mathbb{C}$ ist dies also gleichbedeutend mit Diagonalisierbarkeit). Eine Matrix X heißt *nilpotent*, wenn $X^m = 0$ gilt für ein $m > 0$. Sie heißt *unipotent*, wenn $(I_n - X)^m = 0$ gilt für ein $m > 0$.

Es sei $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eindeutig bestimmte $X_\mathrm{s}, X_\mathrm{n} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit X_s halbeinfach, X_n nilpotent und $X = X_\mathrm{s} + X_\mathrm{n}$. Weiter gilt $X_\mathrm{s}X_\mathrm{n} = X_\mathrm{n}X_\mathrm{s}$.

(b) Es gibt eindeutig bestimmte $g_\mathrm{s}, g_\mathrm{u} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit X_s halbeinfach, g_u unipotent und $g = g_\mathrm{s} \cdot g_\mathrm{u}$. Weiter gilt $g_\mathrm{s}g_\mathrm{u} = g_\mathrm{u}g_\mathrm{s}$.

(Hinweis: Betrachten Sie die Jordansche Normalform von X bzw. g.)

Aufgabe 3 (Gruppenaktionen)

Eine *(Links-)Aktion* einer Gruppe G auf einer Menge M ist eine Abbildung $G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto g.m$, so dass $g_1.(g_2.m) = (g_1g_2).m$ und $1.m = m$ gelten. Die *Bahn* eines Elementes $m \in M$ ist die Teilmenge $G.m = \{g.m \mid g \in G\}$, und der *Stabilisator* (auch *Fixgruppe* genannt) von m ist die Untergruppe $G_m = \{g \in G \mid g.m = m\}$.

(a) Nennen Sie jeweils ein Beispiel für eine Gruppenaktion auf den Mengen $\{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{C}[x, y]$.

(b) Zeigen Sie, dass für $m \in M$ eine Bijektion von der Bahn $G.m$ in die Menge der Nebenklassen G/G_m existiert.

Abgabe der Lösungen in der Vorlesung am 30.10.2007. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/alg_gruppen2007w/

zum Download bereit.