Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 3 **Wintersemester 2007/08**

Aufgabe 1 (Isometrien der hyperbolischen Ebene)

Zeigen Sie, dass alle Isometrien der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ von der Form

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } ad-bc=1 \text{ und } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

oder

$$z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \quad \text{mit } ad-bc=-1 \text{ und } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2 (Diskrete Isometriegruppen)

Zeigen Sie, dass jede diskrete Untergruppe der Isometrien von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{H}^2$ diskontinuierlich operiert. (Hinweis: Sie können Aufgabe 1 von Blatt 2 und Aufgabe 1 dieses Blattes verwenden.)

Aufgabe 3 (Dirichlet-Gebiet für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

Zeigen Sie, dass

$$F = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1/2, |z| > 1\}$$

das Dirichlet-Gebiet $D(u)$ für die Punkte $u = t \cdot \mathrm{i}$, $t > 1$, für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.

Aufgabe 4 (Minkowski-reduzierte Formen)

Skizzieren Sie in $\mathbb{H}^2$ das Bild der Minkowski-reduzierten positiv definiten quadratischen Formen vom Volumen 1 unter der Abbildung

$$q \mapsto \lambda(q).$$

Abgabe der Lösungen in der Übung am 26.11.2007. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/alg_gruppen2007w/

zum Download bereit.