Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 4 **Wintersemester 2007/08**

Aufgabe 1 (Jordan-Zerlegung auf Quotientenräumen)

Es sei $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $W \subset \mathbb{K}^n$ ein g-invarianter Untervektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass W auch invariant unter g_{s} und g_{u} ist.

(b) Es sei $\overline{g}$ der von g induzierte Endomorphismus von $\mathbb{K}^n/W$. Zeigen Sie, dass die Jordan-Zerlegung von $\overline{g}$ durch

$$(\overline{g})_{\mathrm{s}} = \overline{(g_{\mathrm{s}})}, \quad (\overline{g})_{\mathrm{u}} = \overline{(g_{\mathrm{u}})}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 (Iwasawa-Zerlegung der Lorentz-Gruppe)

Es sei

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Die Gruppe

$$\mathrm{O}_{n,1} = \{g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \mid g^\top Q g = Q\}$$

heißt *Lorentz-Gruppe*. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponente der Identität $\mathrm{SO}^\circ_{n,1}$ eine Iwasawa-Zerlegung

$$\mathrm{SO}^\circ_{n,1} = KAN$$

besitzt. Dabei ist K eine maximale kompakte Untergruppe, A ein maximaler über $\mathbb{R}$ diagonalisierbarer Torus und N eine unipotente Untergruppe.
(Hinweis: Zeigen Sie $K \cong \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und dass die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ 0 & \cdots & 0 & \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

einen maximalen über $\mathbb{R}$ diagonalisierbaren Torus bilden.)

Aufgabe 3 (Jordan-Zerlegung)

Bestimmen Sie für

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

die additive und die multiplikative Jordan-Zerlegung, sowie Polynome P und Q mit $P(g) = g_{\mathrm{s}}$ und $Q(g) = g_{\mathrm{n}}$.

Aufgabe 4 (Jordan-Zerlegungen und Exponentialabbildung)

Es sei $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ und $g = \exp(X) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Weiter sei $X = X_\mathrm{s} + X_\mathrm{n}$ die additive Jordan-Zerlegung von X und $g = g_\mathrm{s} g_\mathrm{u}$ die multiplikative Jordan-Zerlegung von g. Zeigen Sie:

$$\exp(X_\mathrm{s}) = g_\mathrm{s} \text{ und } \exp(X_\mathrm{n}) = g_\mathrm{u}.$$

Abgabe der Lösungen in der Übung am 03.12.2007. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/alg_gruppen2007w/

zum Download bereit.