Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 5 **Wintersemester 2007/08**

Aufgabe 1 (Galois-Gruppe)

Es sei K ein Körper und L ein Erweiterungskörper von K. Weiter sei $X \in \mathrm{Mat}_n(L)$ und $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Ein Element $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ operiert auf $X = (x_{ij})$ durch $\sigma(X) = (\sigma(x_{ij}))$.

Zeigen Sie:

(a) Ist f_X (bzw. $f_{\sigma(X)}$) das charakteristische Polynom von X (bzw. $\sigma(X)$), so gilt

$$f_{\sigma(X)} = \sigma(f_X).$$

(b) Ist X halbeinfach (bzw. unipotent), so ist $\sigma(X)$ auch halbeinfach (bzw. unipotent).

Aufgabe 2 (Rationalität der Jordan-Zerlegung)

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0. Weiter sei $X \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $X = X_{\mathrm{s}} + X_{\mathrm{n}}$ die additive Jordan-Zerlegung von X.

Zeigen Sie, dass es Polynome $P, Q \in K[T]$ gibt mit $P(X) = X_{\mathrm{s}}$ und $Q(X) = X_{\mathrm{n}}$.

Aufgabe 3 (Jordan-Zerlegung und Produkte)

Es seien V und W Vektorräume und $g \in \mathrm{GL}(V)$ und $h \in \mathrm{GL}(W)$.

(a) Zunächst sei $V = W$. Zeigen Sie, dass im Falle $gh = hg$ die Jordan-Zerlegung von gh die folgende Gestalt hat:

$$gh = (g_{\mathrm{s}} h_{\mathrm{s}}) \cdot (g_{\mathrm{u}} h_{\mathrm{u}}).$$

(b) Es ist $g \otimes h \in \mathrm{GL}(V \otimes W)$. Zeigen Sie, dass die Jordan-Zerlegung von $g \otimes h$ durch

$$g \otimes h = (g_{\mathrm{s}} \otimes h_{\mathrm{s}}) \circ (g_{\mathrm{u}} \otimes h_{\mathrm{u}})$$

gegeben ist.

Aufgabe 4 (Nullstellen und Ideale)

Es sei $\Bbbk$ ein Körper.

Für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq \Bbbk^n$ sei

$$I(X) = \{f \in \Bbbk[z_1, \ldots, z_n] \mid \forall z \in X : f(z) = 0\}$$

das *(Verschwindungs-)Ideal von X*.

Für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq \Bbbk[z_1, \ldots, z_n]$ ist

$$V(F) = \{z \in \Bbbk^n \mid \forall f \in F : f(z) = 0\}$$

die gemeinsame *Nullstellenmenge* der Elemente aus F.

Das *Radikal* $\sqrt{\mathfrak{J}}$ eines Ideals $\mathfrak{J}$ von $\Bbbk[z_1, \ldots, z_n]$ ist

$$\sqrt{\mathfrak{J}} = \{f \in \Bbbk[z_1, \ldots, z_n] \mid f^r \in \mathfrak{J} \text{ für ein } r > 0\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $V(F) = V(\langle F \rangle)$.

(b) $V(\Bbbk[z_1, \ldots, z_n]) = \emptyset$ und $V(0) = \Bbbk^n$.

(c) $\bigcap_{k=1}^m V(\mathfrak{J}_k) = V(\sum_{k=1}^m \mathfrak{J}_k)$ für Ideale $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_k$ in $\Bbbk[z_1, \ldots, z_n]$.

(d) $V(\mathfrak{J}_1) \cup V(\mathfrak{J}_2) = V(\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2)$ für Ideale $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ in $\Bbbk[z_1, \ldots, z_n]$.

(e) $V(E) \supseteq V(F)$ für Teilmengen $E \subseteq F$ von $\Bbbk[z_1, \ldots, z_n]$.

(f) $I(X) \supseteq I(Y)$ für Teilmengen $X \subseteq Y$ von $\Bbbk^n$.

(g) $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$ für Teilmengen X, Y von $\Bbbk^n$.

(h) $V(I(X)) = \overline{X}$ für eine Teilmenge $X \subseteq \Bbbk^n$ ($\overline{X}$ ist hier der Abschluss in der Zariski-Topologie).

Für den Fall, dass $\Bbbk$ algebraisch abgeschlossen ist, besagt *Hilberts Nullstellensatz*

$$I(V(\mathfrak{H})) = \sqrt{\mathfrak{H}}$$

für ein Ideal $\mathfrak{H}$ in $\Bbbk[z_1, \ldots, z_n]$.

(i) Geben Sie ein Gegenbeispiel für die letzte Aussage, falls $\Bbbk$ nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Abgabe der Lösungen in der Übung am 10.12.2007. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/alg_gruppen2007w/

zum Download bereit.