Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

# Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

**Übungsblatt 6** **Wintersemester 2007/08**

---

### Aufgabe 1 (Korrespondenz zwischen Koordinatenringen und algebraischen Mengen)

Es seien $X = V(\mathfrak{I}) \subset \mathbb{C}^n$ und $Y = V(\mathfrak{H}) \subset \mathbb{C}^m$ algebraische Mengen.

Es seien $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{I}$ bzw. $\mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]/\mathfrak{H}$ die *Koordinatenringe* von $X$ bzw. $Y$.

Ein *Morphismus* $\varphi : X \to Y$ ist eine Abbildung, deren Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ Einschränkungen von Polynomen aus $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ auf die Menge $X$ sind. Der *Komorphismus* $\varphi^*$ von $\varphi$ ist die Abbildung

$$\varphi^* : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X], \quad f \mapsto f \circ \varphi.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$* : \mathrm{Mor}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{C}[Y], \mathbb{C}[X]), \quad \varphi \mapsto \varphi^*$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Morphismen von $X$ nach $Y$ und der Menge der Homomorphismen von $\mathbb{C}$-Algebren von $\mathbb{C}[Y]$ nach $\mathbb{C}[X]$ gegeben ist.

### Aufgabe 2 (Produkte algebraischer Gruppen)

Es seien $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $H \subseteq \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ lineare algebraische Gruppen.

(a) Zeigen Sie, dass auch das direkte Produkt von Gruppen $G \times H$ sich als lineare algebraische Gruppe realisieren lässt.

(b) Sind $G$ und $H$ über $\mathbb{Q}$ definierte Gruppen, so ist auch die lineare algebraische Gruppe $G \times H$ über $\mathbb{Q}$ definiert.

### Aufgabe 3 (Kerne von Morphismen)

Es seien $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $H \subseteq \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ lineare algebraische Gruppen, und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen (d.h. ein Gruppenhomomorphismus, der zugleich ein Morphismus von algebraischen Mengen ist).

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(\varphi)$ eine algebraische Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist.

### Aufgabe 4 (Abelsche lineare algebraische Gruppen)

Zwei algebraische Gruppen heißen *isomorph (als algebraische Gruppen)*, falls es einen Gruppenisomorphismus $\varphi$ gibt, so dass $\varphi$ und $\varphi^{-1}$ auch Morphismen von algebraischen Mengen sind.

Es sei $A \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine abelsche lineare algebraische Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die durch die multiplikative Jordan-Zerlegung definierten Abbildungen

$$s : A \to A, \quad g \mapsto g_{\mathrm{s}},$$
$$u : A \to A, \quad g \mapsto g_{\mathrm{u}},$$

Homomorphismen von algebraischen Gruppen sind.

(b) Es sei $U = u(A)$ und $S = s(A)$. Zeigen Sie, dass $U$ und $S$ algebraische Gruppen sind.

(c) Zeigen Sie, dass $A$ als algebraische Gruppe isomorph ist zu dem direkten Produkt $S \times U$.

---

Abgabe der Lösungen in der Übung am 17.12.2007. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.
Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/alg_gruppen2007w/

zum Download bereit.