Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 7 **Wintersemester 2007/08**

Aufgabe 1 (Siegel-Gebiete und hyperbolisches Volumen)

Wir nennen das Bild eines Siegel-Gebiets $\mathcal{S}_{t,u} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $t \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, $u \geq \frac{1}{2}$ in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ ein Siegel-Gebiet in der hyperbolischen Ebene.

(a) Das hyperbolische Volumen einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{H}^2$ ist gegeben durch

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M) = \int_M \frac{1}{y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \ .$$

Es sei $g \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H}^2)$ eine Möbiustransformation der hyperbolischen Ebene. Zeigen Sie, dass $\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(g.M) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M)$.

(b) Ein Siegel-Gebiet in der hyperbolischen Ebene hat endliches Volumen.

(c) Jede $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Bahn auf $\mathbb{H}^2$ hat endlichen Schnitt mit dem Siegel-Gebiet in $\mathbb{H}^2$.

(d) Folgern Sie, dass der Schnitt jeder Bahn von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit dem Siegel-Gebiet $\mathcal{S}_{t,u} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ endlich ist.

Aufgabe 2 (Einheitswurzeln)

Eine Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ heißt *n-te Einheitswurzel*, wenn

$$\zeta^n = 1$$

gilt. Sie heißt *primitive n-te Einheitswurzel*, wenn $\zeta^k \neq 1$ ist für $k = 1, \ldots, n-1$.

Zeigen Sie:

(a) Die Menge der n-ten Einheitswurzeln bildet eine zyklische Gruppe der Ordnung n, die von einer primitiven Einheitswurzel erzeugt wird.

(b) Für eine n-te Einheitswurzel ζ gilt

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{n-1} = \begin{cases} n & \text{falls } \zeta = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Mit ζ ist auch die komplex Konjugierte $\overline{\zeta}$ eine n-te Einheitswurzel.

(d) Es existieren $\varphi(n)$ primitive n-ten Einheitswurzeln. Dabei ist φ die *Eulersche φ-Funktion*

$$\varphi(n) = |\{1 \leq a \leq n \mid \mathrm{ggT}(a, n) = 1\}|.$$

Aufgabe 3 (Orthogonale Gruppen)

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Untergruppe von $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ isomorph zu einer Gruppe von Einheitswurzeln ist.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
eine zyklische Gruppe der Ordnung 6 erzeugt.

(d) Zeigen Sie, dass es eine positiv definite symmetrische Matrix S gibt, so dass
$$\mathrm{SO}_2(S) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \supseteq \langle B \rangle$$
gilt. Dabei ist
$$\mathrm{SO}_2(S) = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid g^\top S g = S\}$$
eine $\mathbb{Q}$-definierte lineare algebraische Gruppe.

(e) Untersuchen Sie, wann $\mathrm{SO}_2(S)$ und $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{Q}$-isomorph sind, wobei S eine beliebige positiv symmetrische definite Matrix ist.

Aufgabe 4 (Endliche Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

Zeigen Sie, dass jede (nicht-triviale) endliche Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zyklisch von der Ordnung 2, 3, 4 oder 6 ist.
(Hinweis: Bestimmen Sie alle primitiven n-ten Einheitswurzeln ζ mit $\zeta + \overline{\zeta} \in \mathbb{Z}$.)

Schöne Weihnachten!