Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 8 **Wintersemester 2007/08**

Es sei G eine topologische Gruppe, die lokal-kompakt und ein Hausdorff-Raum ist.

Aufgabe 1 (Haar-Maß auf kompakten Gruppen)

Zeigen Sie, dass G genau dann kompakt ist, wenn $\mu(G) < \infty$ ist.
(Hinweis: Das Haar-Maß ist ein reguläres Maß.)

Aufgabe 2 (Haar-Maß auf diskreten Gruppen)

Zeigen Sie, dass G genau dann diskret ist, wenn $\mu(\{1\}) > 0$ ist.

Aufgabe 3 (Unimodulare Charaktere)

Es sei $\mathrm{Aut}_c(G)$ die Gruppe der stetigen Automorphismen von G und $c_g \in \mathrm{Aut}_c(G)$ die Konjugation mit g, d.h.

$$c_g : G \to G, \quad h \mapsto ghg^{-1}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\Delta : \mathrm{Aut}_c(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ ist ein Homomorphismus. Hierbei ist $\Delta(\varphi)$ der unimodulare Faktor von φ.

(b) Für $g \in G$ definiert der unimodulare Charakter

$$\Delta(g) := \Delta(c_g)$$

einen stetigen Homomorphismus.

Aufgabe 4 (Unimodulare Faktoren der Borel-Gruppe)

Es sei $B = AN$, wobei A und N die Gruppe der Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen bzw. der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen aus der Iwasawa-Zerlegung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind.

(a) Zeigen Sie, dass für $b \in B$ mit $b = an$, $a \in A$, $n \in N$, gilt

$$\Delta(b) = \varrho(a),$$

mit $\varrho(a)$ aus der Vorlesung.

(b) Folgern Sie, dass der unimodulare Faktor von $b \in B$ durch

$$\Delta(b) = |\det(\mathrm{Ad}_b)|$$

gegeben ist, wobei Ad_b die *adjungierte Darstellung*

$$\mathrm{Ad}_b : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), \quad X \mapsto bXb^{-1}$$

ist.