Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 9 **Wintersemester 2007/08**

Aufgabe 1 (Gitter in topologischen Gruppen)

Es sei G eine topologische Gruppe, die lokal-kompakt und ein Hausdorff-Raum ist. Weiter sei Γ eine diskrete Untergruppe von G und μ ein rechts-invariantes Haar-Maß auf G.

Existiert eine Teilmenge $M \subset G$ mit $G = M\Gamma$ und $\mu(M) < \infty$, so wird Γ ein *Gitter* genannt.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gruppe G unimodular ist.
(Hinweis: G/Γ besitzt ein G-invariantes Maß.)

Aufgabe 2 (Produkte oberer und unterer Dreiecksmatrizen)

Es sei N^+ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit 1 auf der Diagonalen, und N^- die Gruppe der unteren Dreiecksmatrizen mit 1 auf der Diagonalen.

Weiter werde für $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der obere linke $k \times k$-Block $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ mit g_k bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$N^- \times N^+ \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad (h^-, h^+) \mapsto h^- \cdot h^+$$

ein Homöomorphismus von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ in die abgeschlossenen Teilmenge

$$G_1 = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(g_k) = 1 \text{ für alle } k = 1, \ldots, n\}$$

ist.

Aufgabe 3 (Gauß-Bruhat-Algorithmus)

Es sei $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$, K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

Wir wenden folgende Variante des Gauß-Algorithmus, den *Gauß-Bruhat-Algorithmus*, auf g an:

- Es sei i_1 der *größte* Zeilenindex $1 \leq i_1 \leq n$ mit $g_{i_1,1} \neq 0$.
- Eliminiere durch Zeilenoperationen die Einträge oberhalb von $g_{i_1,1}$, d.h. es gilt für die neue Matrix $g_{i,1} = 0$ falls $i < i_1$.
- Es sei nun i_2 der größte Zeilenindex $1 \leq i_2 \leq n$ mit $i_2 \neq i_1$ und $g_{i_2,2} \neq 0$.
- Eliminiere durch Zeilenoperationen die Einträge oberhalb von $g_{i_2,2}$, d.h. es gilt für die neue Matrix $g_{i,2} = 0$ falls $i < i_2$ und $i \neq i_1$.
- Fahre so fort für $i_3, i_4, \ldots$.

Zeigen Sie anhand des Gauß-Bruhat-Algorithmus, dass g eine Zerlegung

$$g = u \cdot p \cdot b$$

besitzt. Dabei ist

- u eine obere Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonalen,
- p die Matrix, die der Permutation σ mit $\sigma(k) = i_k$ entspricht,
- und b eine obere Dreiecksmatrix.