Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

Übungsblatt 10 **Wintersemester 2007/08**

Aufgabe 1 (Bruhat-Zerlegung)

Es sei $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie (etwa mit Hilfe des Gauß-Algorithmus), dass g eine eindeutige Zerlegung

$$g = u \cdot p \cdot b$$

besitzt, wobei p eine Permutationsmatrix ist, $u \in N^+ \cap pN^-p^{-1}$ und $b \in B$ eine obere Dreiecksmatrix. Dies ist die *Bruhat-Zerlegung* von g.

Nun sei wie in der Vorlesung sei hier $M \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $M^{-1} = M$ und $\Phi_k(t_m) \geq c$ für eine Konstante $c > 0$ und alle k. Für ein Siegel-Gebiet $\mathcal{S}$ von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sei

$$M_{\mathcal{S}} = \{g \in M \mid \mathcal{S} \cap \mathcal{S}g \neq \emptyset\}.$$

Weiter sei P_l die l-te standard-parabolische Untergruppe, d.h.

$$P_l = S \cdot R$$

mit

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; g_1 \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{R}), g_2 \in \mathrm{GL}_{n-l}(\mathbb{R}) \right\} \quad \text{und} \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} I_l & * \\ 0 & I_{n-l} \end{pmatrix} \right\}.$$

Schreibt man $S_1 = \mathrm{GL}_l(\mathbb{R})$ und $S_2 = \mathrm{GL}_{n-l}(\mathbb{R})$, so ist P_l homöomorph zu dem Produkt $S_1 \times S_2 \times R$, und es bezeichne $\pi_S, \pi_{S_1}, \pi_{S_2}, \pi_R$ die Projektion auf den jeweiligen Faktor.

Aufgabe 2 (Harish-Chandra I)

Zeigen Sie

$$M_{\mathcal{S}} \cap P_l = \{g \in M \mid (\mathcal{S} \cap P_l) \cap (\mathcal{S} \cap P_l)g \neq \emptyset\}.$$

Aufgabe 3 (Harish-Chandra II)

Zeigen Sie für $i = 1, 2$:

(a) Die Projektion π_{S_i} bildet das Siegel-Gebiet $\mathcal{S}$ auf ein Siegel-Gebiet $\mathcal{S}_i \subset S_i$ ab.

(b) Für die Menge $M_i = \pi_{S_i}(M \cap P_l)$ gilt $M_i^{-1} = M_i$ und für alle $m \in M_i$ ist $\Phi_k(t_m) \geq c$ für eine Konstante $c > 0$ und alle k.

(c) Es ist $\pi_{S_i}(M_{\mathcal{S}} \cap P_l) \subseteq M_{i\mathcal{S}_i}$.

(Hinweis: Die Projektionen $\pi_{\mathcal{S}_i}$ sind kompatibel mit der Iwasawa-Zerlegung und der Bruhat-Zerlegung.)

Aufgabe 4 (Harish-Chandra III)

Es seien $x = k_x a_x n_x$ und $y = k_y a_y n_y$ die jeweiligen Iwasawa-Zerlegungen. Zeigen Sie

$$\pi_R(n_y) = \pi_S(g)^{-1} \cdot \pi_R(n_x) \cdot \pi_S(g) \cdot \pi_R(g).$$