Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues
Wolfgang Globke

# Algebraische Gruppen und arithmetische Gruppen

**Übungsblatt 11 und Ausblick** **Wintersemester 2007/08**

---

Es seien $G_1$ und $G_2$ Gruppen. Dann existieren eine Gruppe $G = G_1 * G_2$ und injektive Homomorphismen $f_i : G_i \to G$ mit folgender UAE: Sind $H$ eine Gruppe und $\varphi_i : G_i \to H$ Homomorphismen, so gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\Phi : G \to H$ mit $\Phi \circ f_i = \varphi_i$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & G_1 * G_2 \arrow[d, "\Phi"] & G_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Wir nennen $G_1 * G_2$ das *freie Produkt* von $G_1$ und $G_2$.

Es seien $G_1$, $G_2$, $A$ Gruppen und $\alpha_i : A \to G_i$ Homomorphismen. Dann gibt es eine Gruppe $G_1 *_A G_2$ und Homomorphismen $f_i : G_i \to G$ mit $f := f_1 \circ \alpha_1 = f_2 \circ \alpha_2$, die folgende UAE erfüllt: Für alle Gruppen $H$ und Homomorphismen $\varphi_i : G_i \to H$ mit $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$ gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi : G_1 *_A G_2 \to H$ mit $\Phi \circ f_i = \varphi_i$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & H & \\ G_1 \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "f_1"] & G_1 *_A G_2 \arrow[u, "\Phi"] & G_2 \arrow[ul, "\varphi_2"'] \arrow[l, "f_2"'] \\ & A \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] & \end{tikzcd}$$

Wir nennen $G_1 *_A G_2$ das *amalgamierte Produkt* von $G_1$ und $G_2$ über $A$.

### Aufgabe 1 (Erzeuger und Relationen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

Bestimmen Sie Erzeuger und Relationen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

### Aufgabe 2 ($\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ als amalgamiertes Produkt)

Zeigen Sie

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

### Aufgabe 3 (Konjugationsklassen endlicher Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

Zeigen Sie, dass alle endlichen Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ konjugiert sind zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

### Aufgabe 4 (Homöomorphismen zusammenhängender Räume)

Es sei $X$ ein zusammenhängender topologischer Raum und $\Gamma$ eine Gruppe von Homöomorphismen von $X$ mit Erzeugermenge $S$. Weiter sei $U$ eine *offene Fundamentalmenge* von $X$ für die Aktion von $\Gamma$ (d.h. $\Gamma.U = X$).

Zeigen Sie, dass $\Gamma$ von der Menge

$$\Gamma_U = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.U \cap U \neq \emptyset\}$$

erzeugt wird.

### Aufgabe 5 (Homöomorphismen einfach zusammenhängender Räume)

Es sei $X$ ein einfach zusammenhängender topologischer Raum und $\Gamma$ eine Gruppe von Homöomorphismen von $X$ mit Erzeugermenge $S$. Weiter sei $U$ eine zusammenhängende Fundamentalmenge von für die Aktion von $\Gamma$.

Zeigen Sie, dass die Menge der Wörter

$$s_1 s_2 s_3^{-1} \in F(S)$$

mit den Eigenschaften $s_1 \cdot s_2 = s_3$ (in $\Gamma$) und

$$s_1\overline{U} \cap s_3\overline{U} \cap \overline{U} \neq \emptyset,$$

ein Erzeugendensystem für die Relationen von $\Gamma$ in $F(S)$ bildet.

### Aufgabe 6 (Zerfallende Tori)

Es sei $T \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ein über $\mathbb{Q}$ definierter Torus. Weiter sei $K$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- $T$ zerfällt über $K$.
- Für jedes $t \in T \cap \mathrm{GL}_n(K)$ liegen sämtliche Eigenwerte in $K$.

### Aufgabe 7 (Lineare Gruppen über $\mathbb{Q}$-Algebren)

Es sei $A$ eine $\mathbb{Q}$-Algebra mit $n = \dim_{\mathbb{Q}} A < \infty$, und $A_{\mathbb{C}}$ sei die Komplexifizierung von $A$.

Zeigen Sie, dass die Gruppe der Einheiten von $A_{\mathbb{C}}$ isomorph ist zu einer über $\mathbb{Q}$ definierten linearen algebraischen Gruppe $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, und dass $G(\mathbb{Q}) \cong A^{\times}$ ist.