Lineare Gruppen

Es ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir betrachten Untergruppen der **linearen Gruppe**

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid \det(g) \neq 0\}$$

mit Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

1. Die **spezielle lineare Gruppe** ist

   $$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(g) = 1\}.$$

   Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind dies die linearen Transformationen, die Volumen und Orientierung erhalten. Die Lie-Algebra ist

   $$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

   Die Dimension ist $\dim(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = n^2 - 1$.

2. Die **symplektische Gruppe** ist

   $$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K}) \mid g^\top J g = J\},$$

   mit

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

   In der Mechanik ist dies die Gruppe der linearen Transformationen, die die Hamilton-Gleichungen invariant lassen („kanonische Transformationen“). Dabei fasst man die ersten n Koordinaten als Ortskoordinaten auf, die zweiten n Koordinaten als Impulskoordinaten. Es ist $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{K})$. Die Lie-Algebra ist

   $$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K}) \mid X^\top J + JX = 0\}.$$

   Die Dimension ist $\dim(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})) = n(2n+1)$.

3. Die **orthogonale Gruppe** ist

   $$\mathrm{O}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid gg^\top = I_n\}.$$

   Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind dies die linearen Transformationen, die Längen und Winkel erhalten. Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist

   $$\mathrm{SO}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathrm{O}_n(\mathbb{K}) \mid \det(g) = 1\}.$$

   Ihre Lie-Algebren sind identisch,

   $$\mathfrak{o}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid X^\top = -X\}.$$

   Die Dimension ist $\dim(\mathrm{O}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

4. Die **unitäre Gruppe** ist

$$\mathrm{U}_n = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid g\overline{g}^\top = I_n\}.$$

Dies sind die linearen Isometrien bzgl. eines unitären Skalarproduktes auf $\mathbb{C}^n$. Die Lie-Algebra ist

$$\mathfrak{u}_n = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{X} = -X^\top\}.$$

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist

$$\mathrm{SU}_n = \{g \in \mathrm{U}_n \mid \det(g) = 1\}.$$

Die Lie-Algebra ist

$$\mathfrak{su}_n = \{X \in \mathfrak{u}_n \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Die Elemente der unitären Gruppen sind komplexe Matrizen, die Gruppen sind aber keine komplexen, sondern reelle algebraische Gruppen (ebenso wie ihre Lie-Algebren nur reelle Vektorräume sind). Ihre Dimension über $\mathbb{R}$ ist $\dim(\mathrm{U}_n) = n^2$ bzw. $\dim(\mathrm{SU}_n) = n^2 - 1$.

5. Die **Heisenberg-Gruppe** ist

$$\mathrm{H}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Lie-Algebra ist

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Dimension ist $\dim(\mathrm{H}_3(\mathbb{R})) = 3$.

6. Die **Borel-Gruppe** ist

$$\mathrm{B}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; * \in \mathbb{K}, a_1 \cdots a_n \neq 0 \right\}.$$

Die Lie-Algebra ist

$$\mathfrak{b}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; * \in \mathbb{K} \right\}.$$

Die Dimension ist $\dim(\mathrm{B}_n(\mathbb{K})) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

7. Die Gruppe der **unipotenten oberen Dreiecksmatrizen** ist

$$\mathrm{Un}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; * \in \mathbb{K} \right\}.$$

Es ist $\mathrm{Un}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{B}_n(\mathbb{K})$. Die Lie-Algebra ist

$$\mathfrak{un}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; * \in \mathbb{K} \right\}.$$

Die Dimension ist $\dim(\mathrm{Un}_n(\mathbb{K})) = \frac{1}{2}n(n-1)$.