Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie I

Übungsblatt 1 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1 (Wegzusammenhangskomponenten)

Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie, dass $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$ zueinander in Bijektion stehen.

Aufgabe 2 (Eingespannte Kreisscheibe)

Sei $\gamma \in \Omega_x(X)$ ein geschlossener Weg. Wir können γ als Abbildung $S^1 \to X$ auffassen, wobei S^1 der Rand der Einheitskreisscheibe D_2 in $\mathbb{R}^2$ ist. Zeigen Sie, $\gamma \cong c_x\, rel\{0,1\}$ (das heisst, γ ist homotop zur konstanten Schleife) genau dann, wenn γ sich zu einer stetigen Abbildung $F : D_2 \to X$ fortsetzt.

Aufgabe 3 (Einfacher Zusammenhang)

Sei X ein weguzsammenhängender Raum, mit der Eigenschaft, dass jede Abbildung $f : S^1 \to X$ homotop trivial ist (nicht notwendigerweise mit fixierten Endpunkten). Zeigen Sie, X ist einfach zusammenhängend.

Es seien X und Y topologische Räume. Dann bezeichnet $[X, Y]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $X \to Y$. Wenn (X, x) und (Y, y) Räume mit Basispunkt sind, so bezeichnet $[X, Y]_0$ die Menge der basispunkterhaltenden Homotopieklassen von Abbildungen $(X, x) \to (Y, y)$.

Aufgabe 4 (Wirkung von $\pi_1(Y, y)$ auf $[X, Y]_0$)

Seien $f, f' : X \to Y$ Abbildungen und $F : I \times X \to Y$ eine Homotopie zwischen f und f' und definiere $c(t) = F(t, x)$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $f, f' : (X, x) \to (Y, y)$ basispunkterhaltende Abbildungen sind, so ist $c \in \Omega_y(Y)$.

(b) Gegeben sei $f : (X, x) \to (Y, y)$ und $c \in \Omega_y(Y)$. Dann gibt es eine Homotopie F mit $F_0 = f$ und $F(t, x) = c(t)$.

(c) Definiere $[c] \cdot [f] := F_1$. Zeigen Sie, dass dies eine Operation von $\pi_1(Y, y)$ auf $[X, Y]_0$ definiert.

(d) Wenn Y wegzusammenhängend ist, so ist $[X, Y]$ in Bijektion mit dem Quotienten aus $[X, Y]_0$.