Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie I

Übungsblatt 2 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1 (Fundamentalgruppe des Produktes)

Seien X, Y Räume. Zeigen Sie:

$$\pi_1(X,x) \times \pi_1(X,y) \cong \pi_1(X \times Y,(x,y)) \ .$$

Aufgabe 2 (Baby Van Kampen und $\pi_1(S^n)$)

Sei X ein Raum, so daß einfach zusammenhängende offene Teilmengen $U, V \subset X$ existieren mit der Eigenschaft, daß $U \cap V$ zusammenhängend ist und $X = U \cup V$. Zeigen Sie:

(a) X ist einfach zusammenhängend.

(b) S^n, $n \geq 2$ ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 3 (Topologische Gruppen)

Sei G eine zusammenhängende topologische Gruppe, und $H \leq G$ eine diskrete Untergruppe. Zeigen Sie:

(a) Wenn H ein Normalteiler ist, so ist H im Zentrum von G enthalten. Der Quotient G/H ist eine topologische Gruppe.

(b) Wenn G einfach zusammenhängend ist, so gilt $\pi_1(G/H, H) \cong H$.

(c) Die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe ist abelsch.

Aufgabe 4 (Serre-Faserungen)

Eine Abbildung $f : Y \to X$ heisst Faserung, wenn f die Homotopieliftungseigenschaft hat. Das heißt, für jede Homotopie $H : I \times Z \to X$ mit $H_0 = h$, und jeden Lift $h' : Z \to Y$, $f \circ h' = h$, gibt es einen eindeutigen Lift $H' : I \times Z \to Y$, $fH' = H$, mit $H'_0 = h'$.

(a) Es sei f eine Faserung und X zusammenhängend, sowie $x_1, x_2 \in X$. Zeigen Sie, daß die Fasern $Y_i = f^{-1}(x_i)$ zueinander homotopieäquivalent sind.

(b) Finden Sie Beispiele für Faserungen.