Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

**Algebraische Topologie I** **Wintersemester 2009/10**

**Übungsblatt 4** **17. November 2009**

---

### Aufgabe 1 (Universelle Überlagerung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$)

Es sei $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ die universelle Überlagerungsgruppe von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass das Zentrum von $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ eine unendlich zyklische Gruppe ist.

(b) Es sei $\Gamma \leq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ eine diskrete Untergruppe, und $X = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$. Zeigen Sie, es gibt eine zentrale Erweiterung $0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(X,x) \to \Gamma \to 1$.

### Aufgabe 2 (Kofaserungen)

Eine Abbildung $\iota : A \to X$ hat die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft bzgl. $Y$, wenn es für jede Homotopie $F_A : I \times A \to Y$ und jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $F_{A,0} = f \circ \iota$ eine Homotopie $F : I \times X \to Y$ gibt mit $F_{A,t} = F_t \circ \iota$. Dann heisst $\iota : A \to X$ eine Kofaserung, wenn $\iota$ die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft bezüglich jedes Raums $Y$ hat.

(a) $\iota : A \to X$ hat die Homotopie-Fortsetzungseigenschaft, genau dann wenn das folgende Abbildungsproblem eine Lösung hat:

$$\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, dashed] \\
Y^I \arrow[u, "p_0"] & A \arrow[l, "\tilde{F}_A"] \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Hinweis: $Y^I$ bezeichnet den Raum aller stetigen Abbildungen $f : I \to Y$.

(b) $A \subset X$ sei ein Teilraum. Dann ist die Inklusion von $A$ eine Kofaserung genau dann, wenn $A \times I \cup X \times \{0\}$ ein Retrakt von $X \times I$ ist.

### Aufgabe 3 (Nichtdegenerierte Punkte)

Es sei $X$ ein lokal-Euklidischer metrischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Inklusion von $x \to X$ eine Kofaserung.

### Aufgabe 4 (Abbildungszylinder)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Der Abbildungszylinder von $f$ ist $M_f = (X \times I) \sqcup Y \big/ (x,0) \sim f(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Inklusion $X \to M_f$ eine Kofaserung ist.

(b) Es gibt eine Retraktion $r : M_f \to Y$, die eine Homotopie-Äquivalenz ist.

(c) Jede Abbildung ist eine Kofaserung bis auf Homotopie-Äquivalenz von Räumen.