Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie I — Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 5 — **9. Dezember 2009**

Aufgabe 1 ($[X, \Omega Y]_0$ ist eine Gruppe)

Es seien (X, x_0), (Y, y_0) lokalkompakte Räume (mit Basispunkt), die Hausdorff sind. Auf dem Raum $\Omega_{y_0} Y$ definiert die Verkettung von Schleifen eine Verknüpfung $\bullet$. Der Basispunkt in $\Omega_{y_0} Y$ ist die konstante Schleife.

Zeigen Sie: $[X, \Omega_{y_0} Y]_0$ ist eine Gruppe, wobei das Gruppenprodukt induziert wird von $(f \cdot g)(x) := F(x) \bullet g(x)$ (mit $f, g : X \to \Omega_{y_0} Y$).

Aufgabe 2 (Ω ist adjungiert zur Einhängung S)

Es seien (X, x_0), (Y, y_0) lokalkompakte Räume (mit Basispunkt), die Hausdorff sind. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $[SX, Y]_0$ ein natürliches Gruppenprodukt besitzt. Zeigen Sie:

Es gibt einen Isomorphismus von Gruppen $[SX, Y]_0 \cong [X, \Omega_Y]_0$.

Aufgabe 3 (Homologie und Produkte)

Zeigen Sie, der Homologiefunktor von Kettenkomplexen zu graduierten Gruppen vertauscht mit Produkten.

Aufgabe 4 (Reeele projektive Ebene)

Berechnen Sie die Homologie der projektiven Ebene $\mathrm{P}^2\,\mathbb{R}$. Benutzen sie dazu

(a) eine geeignete Triangulierung und die simpliziale Homologie.

(b) die Axiome der singulären Theorie.

Aufgabe 5 (Disjunkte Vereinigung)

Es sei $\mathcal{H}_*$ eine Homologietheorie und X_i, $i = 1, \ldots, n$ eine endliche Familie von Räumen. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i=1,\ldots,n} \mathcal{H}_*(X_i) \;\cong\; \mathcal{H}_*\Big(\coprod_{i=1,\ldots,n} X_i \Big) \,.$$