Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie I — Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 6 — **22. Dezember 2009**

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{H}_*$ eine Homologie-Theorie, die den Axiomen i)-iv) genügt.

Aufgabe 1 (Lange exakte Sequenz eines Tripels)

Es seien $A \subseteq B \subseteq X$ Teilräume. Dann gibt es eine *natürliche* lange exakte Sequenz

$$\xrightarrow{\partial_{k+1}(X,B,A)} \mathcal{H}_k(B,A) \longrightarrow \mathcal{H}_k(X,A) \longrightarrow \mathcal{H}_k(X,B) \xrightarrow{\partial_k(X,B,A)} \mathcal{H}_{k-1}(B,A) \longrightarrow \quad .$$

Aufgabe 2 (Relative Mayer-Vietoris Sequenz)

E sei $(X; X_1, X_2)$ eine exzisive Triade. (Das heisst $X_i \subseteq X$ und für $X_0 = X_1 \cap X_2$ sind alle Abbildungen $\mathcal{H}_k(X_1, X_0) \longrightarrow \mathcal{H}_k(X, X_2)$ Isomorphismen.) Es sei $A \subset X_0$ ein Unterraum. Dann gibt es eine *natürliche* lange exakte Mayer-Vietoris Sequenz der Gestalt

$$\xrightarrow{\partial_{k+1}(X;X_1,X_2)} \mathcal{H}_k(X_0,A) \longrightarrow \mathcal{H}_k(X_1,A) \oplus \mathcal{H}_k(X_2,A) \longrightarrow \mathcal{H}_k(X,A) \xrightarrow{\partial_k(X;X_1,X_2)} \mathcal{H}_{k-1}(X_0,A) \longrightarrow \quad .$$

Wie sehen die Abbildungen in der Mitte des Diagramms aus? Konstruieren Sie die Randoperatoren $\partial_k(X,B,A)$ analog zum absoluten Fall (siehe Vorlesung).

Aufgabe 3 (Zusammenschlagen eines Teilraumes und relative Homologie)

Es sei $A \subset X$ ein Teilraum und X/A der Raum der durch Identifikation von A zu einem Punkt $\{*\}$ ensteht. Wann gilt $\mathcal{H}_k(X,A) = \mathcal{H}_k(X/A, *)$, für alle k? (Zum Beispiel, wenn die Inklusion von A eine Kofaserung ist.)

Aufgabe 4 (Toplogische Mannigfaltikeiten und singuläre Homologie)

Es sei X ein lokal Euklidischer Raum der Dimension n. Zeigen Sie, dass die singulären Homologiegruppen $H_k^{sing}(X,A)$ für $k > n$ verschwinden.

Schöne Weihnachten!