Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie I — Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 7 — **26. Januar 2010**

Aufgabe 1 (Natürliche Transformationen von $S_q(X)$)

Es bezeichne S_* den Funktor $Top \to Kettenkomplexe$, der durch den singulären Kettenkomplex von X definiert wird. Es seien Elemente $P_q \in S_q(\Delta_q)$ vorgegeben. Zeigen Sie, es gibt genau eine natürliche Transformation von Funktoren $P : S_q \to S_q$ mit der Eigenschaft, dass $P(\mathrm{id}_{\Delta_q}) = P_q$.

Aufgabe 2 (Freie azyklische Kettenkomplexe sind zusammenziehbar)

Ein Kettenkomplex C_* heisst *azyklisch*, wenn die Homologie $H(C_*) = 0$ ist. Sei C_* ein Kettenkomplex mit der Eigenschaft, dass die Moduln C_q frei sind, für alle $q \in \mathbb{Z}$. Dann ist id_{C_*} kettenhomotop zur Nullabbildung.

Aufgabe 3 (Der Abbildungskegel für Kettenkomplexe)

Sei $f : C_* \to C'_*$ ein Homomorphismus von Kettenkomplexen. Dann definieren wir den Abbildungskegel von f als den Komplex Cf_* mit $Cf_q = C'_q \oplus C_{q-1}$ und $\partial_q(u, v) = (\partial'_q u + f_{q-1}v, -\partial_{q-1}v)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine induzierte natürliche lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H_q(C') \to H_q(Cf) \to H_{q-1}(C) \to H_{q-1}(C') \to \ldots .$$

(b) Wenn $H_q(f)$ ein Isomorphismus ist, für alle q, dann ist $H(Cf) = 0$.

Aufgabe 4 (Quasi-Isomorphismen von freien Komplexen)

Wenn $f : C_* \to C'_*$ ein Homomorphismus von freien Kettenkomplexen ist, so dass $H(f)$ ein Isomorphismus ist, dann ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz.

Hinweis. Die Aufgabe zeigt insbesondere, dass der singuläre Komplex $S_*(X)$ kettenhomotopieäquivalent zu dem Komplex der kleinen Ketten $S_*^{\mathcal{V}}(X)$ ist.