Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie I — Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 8 — **10. Februar 2010**

Aufgabe 1 (Knotenkomplemente)

Es sei $s_1 = f(S^1) \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten. Dann gilt $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^3 - s_1) = \mathbb{Z}$, für $q = 1, 2$ und $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^3 - s_1) = 0$ sonst.

Hinweis: $H_q(S^3 - s_1)$ wurde in der Vorlesung berechnet.

Aufgabe 2 (Invarianz des Gebietes)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $V = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$.

Hinweis: Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Jordan-Brouwer.

Aufgabe 3 (Abbildungen von P^{2n})

Jede Abbildung reell projektiver Räume $f : P^{2n}\mathbb{R} \to P^{2n}\mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt. (Die analoge Behauptung ist falsch für $P^{2n+1}\mathbb{R}$.)

Hinweis: Untersuchen sie Abbildungen $S^{2n} \to S^{2n}$.

Aufgabe 4 (Vektorfelder auf Sphären)

Konstruieren Sie drei linear unabhängige nirgends verschwindende Vektorfelder auf S^{4n+3}. Geben Sie auf S^7 sieben solche Vektorfelder an und acht auf S^{15}.

Aufgabe 5 (Homologie und direkter Limes)

Sei I eine teilgeordnete Menge und $\{C^\alpha, \iota_{\alpha\beta}\}$ ein direktes System von Kettenkomplexen (wobei $\iota_{\alpha\beta} : C^\alpha \to C^\beta$ für alle $\alpha \leq \beta$ ein Homomorphismus von Kettenkomplexen ist). Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen direkten Limes $\varinjlim C^\alpha$ in der Kategorie der Kettenkomplexe mit zugehörigen natürlichen Homomorphismen $\iota_\alpha : C^\alpha \to \varinjlim C^\alpha$.

(b) Die Homologiegruppen $H_q(C^\alpha)$ mit Homomorphismen $H_q(\iota_{\alpha\beta})$ bilden ein direktes System abelscher Gruppen.

(c) Es gilt
$$\varinjlim H_q(C^\alpha) = H_q(\varinjlim C^\alpha) .$$