Kit Campus Süd
Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie II — Sommersemester 2010

Übungsblatt 3 — **19. Mai 2010**

Aufgabe 1 (Binomialkoeffizienten)

Es sei Δ_n ein n-Simplex. Zeigen Sie, dass für die Eulercharakteristik von Δ_n gilt $\chi(\Delta_n) = 1$. Folgern Sie, dass $\sum_{k=0,\dots,n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

Aufgabe 2 (Randoperator der zellulären Homologie)

Es sei $\mathcal{H}$ eine Homologietheorie mit $\partial^{\mathcal{H}}_{(X,A)} : \mathcal{H}_q(X,A) \to \mathcal{H}_{q-1}(A)$ der Randoperator der langen exakten Sequenz des zellulären Paares (X,A). Es sei $\partial^c_{(X,A)} : \mathcal{H}^c_q(X,A) \to \mathcal{H}^c_{q-1}(A)$ der Randoperator der zugehörigen zellulären Homologie. Zeigen Sie, dass die natürlichen Isomorphismen von Funktoren $\mathcal{H}^c_q(X,A) \to \mathcal{H}_q(X,A)$ mit diesen Randoperatoren verträglich sind.

Aufgabe 3 (Abbildungsgrad)

Es sei $f : S^n \to S^n$ eine glatte Abbildung, und es existiere ein regulärer Wert p für f, so dass $f^{-1}(p) = \{q\}$ nur ein Element hat. Zeigen Sie, dass der Abbildungsgrad von f das Vorzeichen der Jacobi-Abbildung $df : T_qS^n \to T_pS^n$ ist. Verallgemeinern Sie dieses Resultat in geeigneter Weise für den Fall eines beliebigen regulären Wertes.

Aufgabe 4 (Produkte von Komplexen)

X und Y seien CW-Komplexe. Drücken Sie den Randoperator im zellulären Komplex von $X \times Y$ aus mit Hilfe der zellulären Randoperatoren von X und von Y.

(a) Konstruieren Sie dann einen natürlichen Homomorphismus

$$\mathrm{x} : \mathcal{H}^c(X) \otimes \mathcal{H}^c(Y) \to \mathcal{H}^c(X \times Y).$$

(b) Berechnen Sie die Homologie des n-Torus T^n.

Aufgabe 5 (Singuläre Kohomologie)

Verifizieren Sie, dass die singuläre Kohomologie die Axiome einer Kohomologie-Theorie erfüllt.