Kit Campus Süd, Institut für Algebra und Geometrie
Oliver Baues

Algebraische Topologie II **Sommersemester 2010**

Übungsblatt 4 **10. Juni 2010**

Aufgabe 1 (Zelluläres $\cup$-Produkt)

Beweisen Sie die Verträglichkeit des zellulären Cup-Produktes mit der langen exakten Sequenz eines Raumpaares.

Aufgabe 2 (Singuläres $\cup$-Produk)

Für singuläre Kohomologie können wir das $\cup$-Produkt für X auf der Ebene der Kettenkomplexe definieren. Hierzu seien $\lambda_p : \Delta_p \to \Delta_{p+q}$ und $\varrho_q : \Delta_q \to \Delta_{p+q}$ die affinen Abbildungen $\lambda_p = (E_0, \dots, E_p)$ und $\varrho_q = (E_q, \dots, E_{p+q})$. Dann definieren wir für singuläre Simplizes $f : \Delta_{p+q} \to X$, und $\mu \in S^p(X)$, $\nu \in S^q(X)$

$$< \mu \cup \nu, f > = < \mu, f\lambda_p >< \nu, f\varrho_q > \ .$$

(a) Beweisen Sie, dass $\cup$ die graduierte Gruppe $S^*(X)$ zu einer graduierten assoziativen Algebra macht.

(b) Zeigen Sie, dass der singuläre Randoperator $\delta : S^*(X) \to S^*(X)$ eine Derivation des graduierten (!) Ringes ist.

(c) Folgern Sie die Definition des singulären Kohomologie $\cup$-Produktes.

Aufgabe 3 (Berechnung von $\cup$)

Es sei X ein Raum, der eine Überdeckung mit ℓ zusammenziehbaren offenen Teilmengen besitzt, und es seien $\lambda_i \in \mathcal{H}^{q_i}(X)$, $q_i \geq 1$, $i = 1, \dots, \ell$ gegeben. Dann gilt

$$\lambda_1 \cup \cdots \cup \lambda_\ell = 0 \ .$$

Folgern Sie:

(a) Es sei X eine Einhängung. Dann verschwinden die $\cup$-Produkte in X. (Bis auf Produkte mit Grad 0 Faktoren).

(b) Jeder Atlas des Torus T^d hat wenigstens $d + 1$ Elemente.

(c) Die komplex projektiven Räume, der Dimension ≥ 2, sind nicht homotopie-äquivalent zu einer Einhängung eines Raumes.

Aufgabe 4 (Hopf-Invariante)

E sei $f : S^{2n-1} \to S^n$. Zeigen Sie, dass die Hopf-Invariante $h(f)$ invariant unter Homotopie ist, und $h(f) = 0$, falls f nullhomotop ist. Beweisen Sie hierzu:

(a) Wenn f und f' homotop sind, so gibt es eine Homotopieäquivalenz zwischen den Abbildungskegeln C_f und $C_{f'}$.

(b) Wenn f die triviale Abbildung ist, so verschwinden alle $\cup$-Produkte in C_f

(c) Gleiches gilt, wenn f eine Einhängung von $g : S^{2n-2} \to S^{n-1}$ ist.