

Mathematik I für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Übungsblatt 3

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(b) $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$:

(i) $\sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \binom{n}{j}$.

(ii) $\sum_{j=0}^n (-1)^j j \binom{n}{j}$.

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

(iii) $\sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$.

(iv) $\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

(b) $3^{(2^n)} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.

(c) $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \in \mathbb{N}$.

(d) $1 + nx \leq (1+x)^n$, wobei die reelle Zahl $x \geq -1$ fest gewählt sei.