Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Mathematik I für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Übungsblatt 8 **Wintersemester 2009/2010**

Aufgabe 1

Prüfen Sie die Folgen mit den folgenden Gliedern auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{21n^7-17n^5+3n^2+2n}{99-n-\frac{37}{5}n^2+35n^3+3n^4-\frac{7}{3}n^5-n^6+\frac{1}{2}n^7}$.

(b) $b_n = (\frac{1}{n} - n)^n$.

(c) $c_n = \frac{1+2+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}$.

(d) $d_n = n^2(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-1})$.

Aufgabe 2

In den bayrischen Wäldern leben die Wolpertinger. Seit ihr einziger natürlicher Fressfeind, der Steubär, endgültig aus Bayern verschwunden ist, wächst die Population dieses einst sehr seltenen Tieres von Generation zu Generation.

Da diese Tiere eine ernsthafte Bedrohung für die Bierbestände der bayrischen Landbevölkerung darstellen, befahl der König von Bayern seinen Hofwissenschaftlern, einen Weg zu ersinnen, der Plage Herr zu werden.

Die Wissenschaftler empfahlen, das Wachstum durch das Aussetzen sterilisierter Wolpertinger-Männchen einzudämmen. Es bezeichne nun w_k die Anzahl der Männchen in der k-ten Generation (wobei natürlich $w_1 > 0$), $s \geq 0$ die Anzahl der in jeder Generation ausgesetzten sterilisierten Männchen und $r > 1$ die mittlere Anzahl der männlichen Nachkommen pro fruchtbarem Paarungsvorgang. Die Wissenschaftler fanden das folgende Fortpflanzungsgesetz ($k \in \mathbb{N}$):

$$w_{k+1} = r\frac{w_k^2}{w_k + s}.$$

Nun stellte sich für die Wissenschaflter jedoch die Frage, wie die Anzahl s zu bestimmen sei, so dass die Wolpertingerplage zwar eingedämmt wird, die possierlichen Tiere aber nicht gänzlich aussterben.

(a) Nehmen Sie (zunächst noch ohne Beweis) an, dass der Grenzwert w der Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert. Welche Zahlen kommen für w in Frage (bei gegebenen r, s)? Zeichnen Sie einen Wolpertinger!

(b) Zeigen Sie, dass für $s > (r-1)w_1$ die Zahl w_k der fruchtbaren Männchen monoton abnimmt und die Population ausstirbt.

(c) Zeigen Sie, dass für $s < (r-1)w_1$ die Population gegen unendlich wächst.

(d) Was geschieht für $s = (r-1)w_1$?

Aufgabe 3

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit den jeweiligen Grenzwerten a und b.

Beweisen Sie (mit Hilfe der Definition des Grenzwerts) die aus der Vorlesung bekannten Rechenregeln:

(a) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = a_n b_n$ ist konvergent und hat den Grenzwert $c = ab$.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass die Folgen beschränkt sind (d.h. $|a_n|, |b_n| < K$ für alle n und eine geeignete Konstante K).

(b) Ist $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, so ist die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \frac{a_n}{b_n}$ konvergent und hat den Grenzwert $d = \frac{a}{b}$.

Hinweis: Zeigen Sie dies zunächst für den Spezialfall $d_n = \frac{1}{b_n}$ und folgern Sie daraus den allgemeinen Fall.

Einwurf der Lösungen bis zum 14.12.2009, 13:00 Uhr, in einen der gelben Einwurfkästen im ersten Stock des Allianz-Gebäudes 05.20 neben Seminarraum 1C-03.1. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/biochem2009w/

zum Download bereit.