Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Mathematik I für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Übungsblatt 10 **Wintersemester 2009/2010**

Auf diesem Blatt funktioniert die Punktvergabe etwas anders. Für die Aufgabe 1 gibt es wie üblich bis zu 4 Punkte, für die Aufgabe 2 bis zu 8 Punkte. Für die Bonusaufgabe können Sie 4 Bonuspunkte erhalten. Diese Aufgabe wird später in der Vorlesung noch gebraucht werden. Dem Umfang dieses Übungsblattes zum Trotz wünschen wir:

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Bonusaufgabe

Gegeben sei eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius $\varrho > 0$, und sei r eine Zahl mit $0 < r < \varrho$.

(a) Zeigen Sie, dass für $|x| \leq r$ gilt:

$$|f(x)| \leq M := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, r^k < \infty,$$

d.h. die Funktion f ist auf jedem Intervall $(-r, r)$ mit $r < \varrho$ beschränkt.

(b) Nun sei n_0 eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass man f in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n_0} a_k x^k + x^{n_0+1} g_{n_0}(x)$$

schreiben kann mit einer Funktion g_{n_0}, die auf dem Intervall $(-r, r)$ mit $r < \varrho$ beschränkt ist.

Aufgabe 1

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen stetig?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2+x-2} & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}, \\ -3 & \text{für } x = 1, \\ -\frac{1}{3} & \text{für } x = -2 \end{cases}.$$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_3(x, y) = \frac{2x^4 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Aufgabe 2

In seinem *Liber Abbaci* von 1202 stellte Leonardo Pisano (1170-1250), besser bekannt unter dem Namen Fibonacci, folgende „Kaninchenaufgabe“:

Jemand brachte ein Kaninchenpaar in einen gewissen, allseits von Wänden umgebenen Ort, um herauszufinden, wieviele Paare aus diesem in einem Jahr entstehen würden. Es sei die Natur der Kaninchen, pro Monat ein neues Paar hervorzubringen und im zweiten Monat nach der Geburt erstmals zu gebähren. Todesfälle jedoch mögen nicht eintreten.

Um die Naturnähe des Fibonaccischen Modells wollen wir uns nicht sorgen. Wenn wir noch annehmen, dass das „Urpaar“ unmittelbar nach seiner Geburt in das Zeugungsgehege gesperrt worden sein, so finden wir Monat für Monat folgenden Anzahlen von Kaninchenpaaren: 1 (das Urpaar), 1 (immer noch das Urpaar), 2 (das Urpaar und das erste Nachwuchspaar), 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 .... Diese sogenannten *Fibonacci-Zahlen* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sind offenbar durch die folgende Rekursionsvorschrift gegeben:

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für } n = 3, 4, \ldots$$

Nun soll eine geschlossen Darstellung der Fibonacci-Zahlen gefunden werden. Beweisen Sie dazu:

(a) Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ab $n = 2$ streng monoton wachsend, und für alle n ist $\frac{f_{n+1}}{f_n} \leq 2$.

(b) Die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$$

konvergiert für $|x| < \frac{1}{2}$.

(c) Für $|x| < \frac{1}{2}$ ist $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$, also $f(x) = -\frac{1}{x^2+x-1}$.

(d) Die Nullstellen des Polynoms $x^2 + x - 1$ sind

$$\tau = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

und mit ihnen gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\sigma} - \frac{1}{x-\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\tau}} - \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\sigma}}\right).$$

(e) Für hinreichend kleine $|x|$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau^{n+1}} - \frac{1}{\sigma^{n+1}}\right)x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)x^n.$$

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Hier dürfen Sie die folgende Tatsache verwenden: Gilt für zwei Potenzreihen $a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ die Gleichung $a(x) = b(x)$ sofern beide Reihen in x konvergieren, so folgt $a_k = b_k$ für alle $k \geq 0$.

Bemerkung: Die Zahl $\tau + 1 \approx 1,618$ ist als *goldener Schnitt* bekannt. Das in dieser Aufgabe vorgestellte Vorgehen, um aus einer Rekursionsgleichung mit Hilfe einer Potenzreihendarstellung eine geschlossene Formel abzuleiten, wird als *Methode der erzeugenden Funktionen* bezeichnet.

Einwurf der Lösungen bis zum 11.1.2010, 13:00 Uhr, in einen der gelben Einwurfkästen im ersten Stock des Allianz-Gebäudes 05.20 neben Seminarraum 1C-03.1. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/biochem2009w/

zum Download bereit.