

Mathematik I für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Übungsblatt 11

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right) \right)$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\frac{x}{2})}{1 - \cos(x)}$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x) - \sin(x)}{\ln(x+1)}$.

Aufgabe 2

- (a) Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:
- (i) $f_1 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arcsin(x)$.
- (ii) $f_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$ mit $a > 0$.
- (b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, für welche n die Funktion f differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 3

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für alle reellen $x, y \geq 0$:

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |\ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^y)| \leq |x - y|.$$

- (b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^3 - 3x + a$ keine zwei verschiedenen Nullstellen ξ_1, ξ_2 (mit $\xi_1 < \xi_2$) im Intervall $[-1, 1]$ besitzt.