Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Inform. Wolfgang Globke

Mathematik I für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Übungsblatt 12 **Wintersemester 2009/2010**

Aufgabe 1

Wir definieren den *Sinus Hyperbolicus* durch

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und den *Cosinus Hyperbolicus*

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ beide den Konvergenzradius $\varrho = \infty$ haben.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen $\sinh'(x)$ und $\cosh'(x)$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2.$$

Was folgt hieraus für die Funktion f?

(d) Zeigen Sie:

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Taylor-Reihen mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ für die folgenden Funktionen:

(a) $f_1(x) = \cos(\pi x)$.

(b) $f_2(x) = 2x^4 - 3x^3 + x + 1$.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Taylor-Reihen gegen die entsprechenden Funktionen f_1 und f_2?

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{3+x}, \quad x \neq 3.$$

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Geben Sie den Konvergenzradius ϱ dieser Taylor-Reihe an.

(b) Zeigen Sie für $x \geq 0$ die folgende Abschätzung:

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Formel im Punkt $x_0 = 0$ für die Funktion $\sqrt{1+x}$.

Für die folgende Bonusaufgabe können sie bis zu 4 Punkte erhalten.

Bonusaufgabe

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie (durch vollständige Induktion), dass f auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(c) Begründen Sie, warum das Restglied $R_{k,0}(x)$ aus der Taylor-Formel für $k \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert.

Einwurf der Lösungen bis zum 25.1.2010, 13:00 Uhr, in einen der gelben Einwurfkästen im ersten Stock des Allianz-Gebäudes 05.20 neben Seminarraum 1C-03.1. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/biochem2009w/

zum Download bereit.