3.5 Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \,, \qquad \varrho \geq 0 \;\; \text{Konvergenzradius.}$$

Bemerkung

Ist $\varrho > 0$ so definiert die Potenzreihe eine Funktion

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

im Konvergenzkreis $\{x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| < \varrho\}$

Beispiel 1

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ im Konvergenzkreis $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1\}$

Beispiel 2

$f(x) = \frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-x^2/2)}$. Für $\left|\frac{x^2}{2}\right| < 1$ gilt also
$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}x^{2k}$. $\quad (\varrho = \sqrt{2})$

Satz (Berechnung des Konvergenzradius')

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihe. Dann gilt:

- Existiert $c = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, so ist $\varrho = \frac{1}{c}$.
- Existiert $d = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$, so ist $\varrho = \frac{1}{d}$.

Bemerkung

Ist $c = 0$, so ist $\varrho = \infty$ zu setzen , für $c = \infty$ ist $\varrho = 0$. Dasselbe gilt für d.

Definition

Sei $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}^n$.
$b \in \mathbb{R}^m$ heißt Grenzwert von f für x gegen a, bzw.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

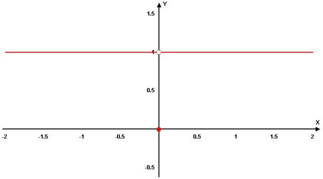
genau dann, wenn für jede gegen a konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_k \neq a$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = b\,.$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots \to a$ (alle $x_k \neq a$) $\quad \rightsquigarrow$
$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots \to b$, dasselbe b für jede Folge!

Beispiel 1

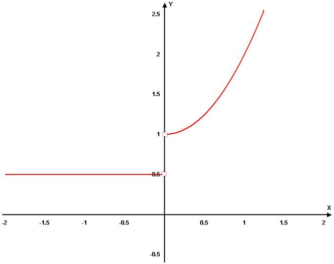
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$



$\lim_{x\to 0} f(x)=1$,
f hat „Sprungstelle“ in $x=0$.

Beispiel 2

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},$$
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x<0\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$$



$\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

Im Fall $n = 1$ (Funktionen einer Variablen) haben wir folgende

Definitionen

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) \qquad \text{heißt linksseitiger Grenzwert},$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) \qquad \text{heißt rechtsseitiger Grenzwert}.$$

Ist $m = 1$, $b = \pm\infty$ und $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so sprechen wir von einem uneigentlichen Grenzwert:

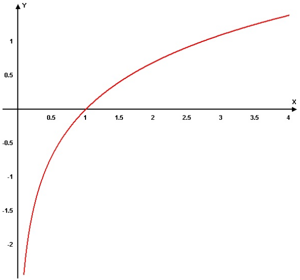
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

genau dann, wenn für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}_f$ mit $x_k \to a$ für $k \to \infty$ die Folge $f(x_k)$ gegen b konvergiert.

Beispiel 3

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$

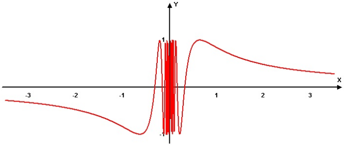
$$\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x \to \infty} \ln(x) = +\infty\,.$$



Beispiel 4

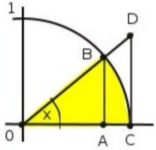
$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(1/x)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{existiert nicht.}$$



Beispiel 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



Beweisidee:

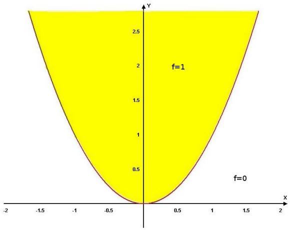
Fläche($\Delta(0, A, B)$) $<$ gelbe Fläche $<$ Fläche($\Delta(0, C, D)$)

Beispiel 6

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y < x^2 \\ 1, & y \geq x^2 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) \quad \text{existiert nicht.}$$



Eigenschaften von Grenzwerten von Folgen übertragen sich auf Grenzwerte von Funktionen:

Bemerkung 1

Seien $f, g : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Funktionen, $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- Existieren $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$, so auch
$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$
- Ist $m = 1$ und existieren $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$, so auch
$$\lim_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\,.$$
  Ist weiter $\mathcal{W}_g \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, so gilt
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\,.$$

Bemerkung 2

Für $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\big)$, $a \in \mathbb{R}^n$ existiert $\lim_{x\to a} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x\to a} f_j(x)$ existiert für $j = 1, 2, \ldots, m$. In diesem Fall ist

$$\lim_{x\to a} f(x) = \left(\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x\to a} f_m(x)\right).$$