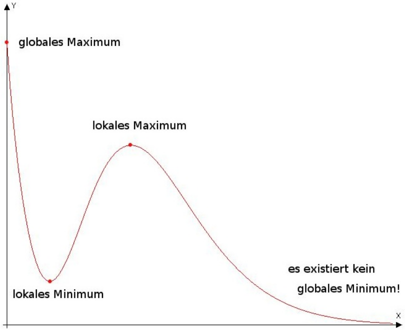
Definition

$f : \mathfrak{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat an $x_0 \in \mathfrak{D}_f$ ein globales / absolutes Maximum, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in \mathfrak{D}_f$,
ein lokales / relatives Maximum, wenn $\delta > 0$ existiert sodass für alle $x \in \mathfrak{D}_f$ mit $\operatorname{dist}(x, x_0) < \delta$ gilt: $f(x_0) \geq f(x)$.



Analog: globales und lokales Minimum

Extremum = Maximum oder Minimum

$$\mathfrak{D}_f = [0, \infty)$$

Satz vom Maxiumum und Minimum

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f ein globales Maximum und ein globales Minimum in $[a, b]$.

Beweis.

mit Vollständigkeitsaxiom, ähnlich wie beim Zwischenwertsatz $\square$

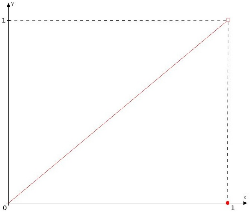
Notation

$$\max_{x \in [a,b]} f(x), \qquad \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Beispiel 1

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

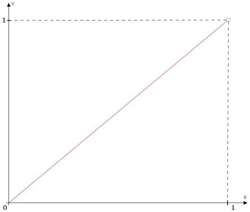
kein Maximum, da f unstetig ist



Beispiel 2

$$g : [0, 1) \to \mathbb{R},\ g(x) = x$$

kein Maximum, g ist stetig, aber $[0, 1)$ nicht abgeschlossen

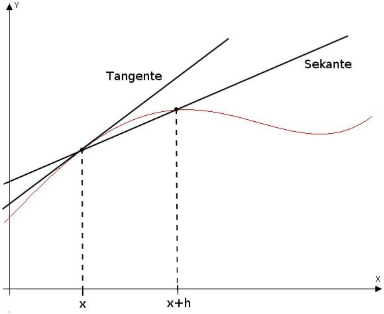


4.1 Differenzierbarkeit

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, z.B. $I = [a, b]$ oder $I = (-\infty, b)$,

$f : I \to \mathbb{R}$ Funktion

$f'(x)$ = Steigung des Graphen an der Stelle $x \in I$
= Steigung der Tangente



Steigung der Sekante:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Steigung der Tangente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definition

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0.

f heißt differenzierbar auf I, falls f an jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar ist.

Bemerkung

Falls $I = [a, b]$, so sind für $x_0 = a, b$ nur einseitige Grenzwerte möglich:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{h\to 0-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

Satz

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an $x_0 \in I$, so ist f stetig an x_0.

Beweis.

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$
$$= \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} h\right)}_{=0}\cdot\underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}_{=f'(x_0)} = 0\,. \qquad \square$$

Beispiel 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0, \text{ also } f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I mit Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$.

f heißt stetig differenzierbar auf I, wenn f' stetig ist auf I. f heißt zweimal differenzierbar auf I, wenn f' differenzierbar ist auf I. $f'' = (f')' : I \to \mathbb{R}$ heißt zweite Ableitung von f. f heißt zweimal stetig differenzierbar, wenn f'' existiert und stetig ist.

Analog: k-mal (stetig) differenzierbar

Beispiel 2

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{iv}(x) = 0$, $f^{(k)}(x) = 0$ für $k \geq 4$.
Insbesondere ist f beliebig („unendlich“) oft stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Schreibweisen

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left(\frac{d}{dx} f\right)(x_0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} f\,, \qquad f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Beispiel 3

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \sin(x) \underbrace{\left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right)}_{\to 0\ (h \to 0)} + \cos(x) \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1\ (h \to 0)}
\end{aligned}$$

Beispiel 4

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \cos(x) \underbrace{\left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right)}_{\to 0\ (h \to 0)} - \sin(x) \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1\ (h \to 0)}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

$$\big(\sin x\big)' = \cos x\,, \qquad \big(\cos x\big)' = -\sin x \qquad \text{auf } \mathbb{R}\,.$$

sin und cos sind insbesondere beliebig oft differenzierbar.

Satz

Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an x, so auch ihre Summe $f + g$, ihr Produkt $f \cdot g$ und, falls $g(x) \neq 0$, auch ihr Quotient $\frac{f}{g}$. Es gilt

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) && \text{Produktregel} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} && \text{Quotientenregel} \end{aligned}$$

Spezialfall der Produktregel

Ist $c \in \mathbb{R}$, so gilt

$$(c \cdot f)' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)\,.$$

Beispiel 7

$$\begin{aligned}\cot'(x) &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-1}{(\sin x)^2} \\ &= -1 - (\cot x)^2 \qquad \text{für } x \in (0, \pi)\end{aligned}$$

Satz (Kettenregel)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an $x \in I$, und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar an $f(x)$ (also insbesondere $f(x) \in J$). Dann ist $g \circ f$ differenzierbar an x und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$

Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathcal{W}_f \to I$. Ist f differenzierbar an $x \in I$ und $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar an $y = f(x)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Beweis.

Es gilt $f(f^{-1}(y)) = y$. Ableiten nach y unter Anwendung der Kettenregel liefert

$$\frac{d}{dy}\Big(f(f^{-1}(y))\Big) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1\,.$$

$\square$