4.4 Taylorentwicklung und Taylorreihen

Idee

Approximation einer Funktion durch Polynome, analog zur linearen Approximation (durch Tangente)

Lineare Approximation:

$$f(x) \;\rightsquigarrow\; f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) =: P_{1,x_0}(x)$$

Gesucht

wird ein Polynom P_{k,x_0} vom Grad $k \geq 1$, das mit f in x_0 den Funktionswert und die ersten k Ableitungen gemeinsam hat, d.h. folgende Bedingungen erfüllt:

$$P_{k,x_0}(x_0) = f(x_0), \quad P_{k,x_0}^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \;\; j = 1, 2, \ldots, k.$$

Ansatz

$$P_{k,x_0}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_k(x-x_0)^k$$

$$\begin{aligned}
P'_{k,x_0}(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + ka_k(x-x_0)^{k-1} \\
P''_{k,x_0}(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-x_0) + \cdots + (k-1)ka_k(x-x_0)^{k-2} \\
&\vdots \\
P^{(k)}_{k,x_0}(x) &= k!\,a_k \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{Einsetzen von } \; x = x_0 \; \text{ liefert}
\end{aligned}$$

Bedingungen für die Koeffizienten $a_0,\, a_1,\, a_2, \ldots,\, a_k$

$$\begin{aligned}
P_{k,x_0}(x_0) &= a_0 \overset{!}{=} f(x_0), \\
P^{(j)}_{k,x_0}(x_0) &= j!\,a_j \overset{!}{=} f^{(j)}(x_0), \quad \text{also} \\
a_j &= \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \quad \text{für } \; j = 1, 2, \ldots, k.
\end{aligned}$$

Beispiel 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x,\ \ x_0 = 0.$

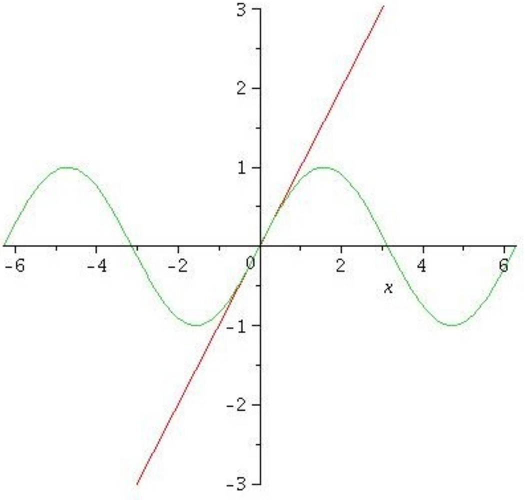
$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{iv}(x) = \sin x,$
$f^{(j)}(x) = f^{(j-4)}(x)$ für $j \geq 4$. Insbesondere gilt für $j \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(2j)}(x_0) = 0, \qquad f^{(2j+1)}(x_0) = (-1)^j,$$

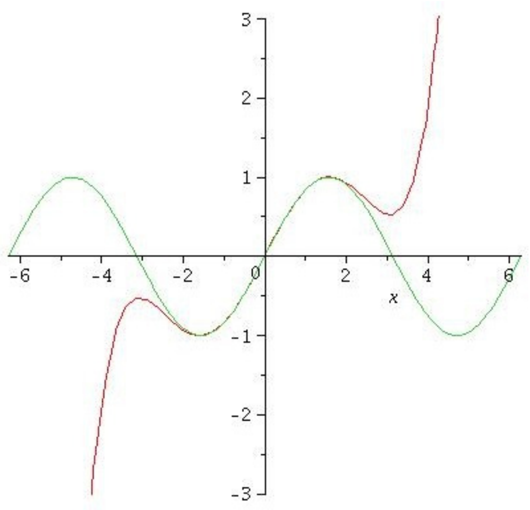
also

$$\begin{aligned} P_{k,0}(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \frac{x^9}{9!} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}. \end{aligned}$$

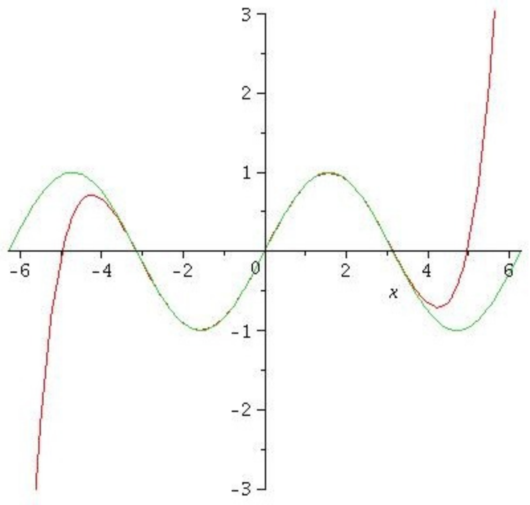
Taylorpolynom $P_{1,0}$ zu $f(x) = \sin x$ vom Grad 1 im Nullpunkt



Taylorpolynom $P_{5,0}$ zu $f(x) = \sin x$ vom Grad 5 im Nullpunkt



Taylorpolynom $P_{9,0}$ zu $f(x) = \sin x$ vom Grad 9 im Nullpunkt



Beispiel 2

$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f''(x) = -1(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = -2 \cdot (-1)(1+x)^{-3}$,

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{j-1}(j-1)!(1+x)^{-j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere $f^{(j)}(x_0) = (-1)^{j-1}(j-1)!$ für $j \in \mathbb{N}$, also

$$\begin{aligned} P_{k,0}(x) &= 0 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!x^k}{k!} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}. \end{aligned}$$

Beispiel 3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x,\ x_0 = 0.$

$f^{(j)}(x) = e^x,$ also $f^{(j)}(x_0) = e^0 = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

$$P_{k,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}.$$

Satz (Taylorformel)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(k+1)$–mal differenzierbar, $x_0, x \in (a,b)$. Dann existiert $\xi \in (x_0, x)$ (bzw. $\xi \in (x, x_0)$) sodass

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \\
&= P_{k,x_0}(x) + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}_{=:R_{k,x_0}(x)}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung

$R_{k,x_0}(x)$ heißt Restglied in Lagrangeform, ξ hängt von x ab!

Folgerung 1

Gilt $|f^{(k+1)}(t)| \leq M$ für alle $t \in (a, b)$, so haben wir eine Restgliedabschätzung der Form

$$|R_{k,x_0}(x)| = \left|\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}\right| \leq \frac{M}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1}.$$

Gilt sogar $f^{(k+1)}(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$.

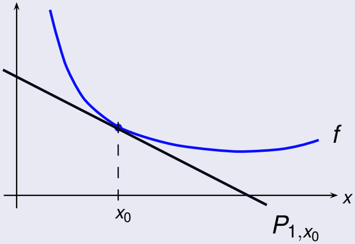
Im Spezialfall $f'(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$ bedeutet dies, dass die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konstant ist.

Folgerung 2 (Geometrische Bedeutung von f'')

Im Falle $k = 1$ haben wir für $x \neq x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{=P_{1,x_0}(x)} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2}_{>0 \text{ falls } f''(\xi)>0}.$$

Ist also $f'' > 0$ auf (a, b), so liegt der Graph von f oberhalb jeder seiner Tangenten. In diesem Fall heißt f konvex.

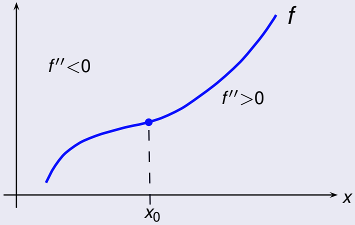


f'' beschreibt die „Krümmung" des Graphen.

Folgerung 2 (Geometrische Bedeutung von f'')

f' streng monoton wachsend $\iff$ $f'' > 0$ $\rightsquigarrow$ f konvex
f' streng monoton fallend $\iff$ $f'' < 0$ $\rightsquigarrow$ f konkav

f hat einen Wendepunkt in x_0, falls f' in x_0 ein lokales Extremum hat.



Folgerung 3

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$. Ist $f''(x_0) < 0$, so besitzt f ein lokales Maximum in x_0, ist $f''(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in x_0.