Karlsruher Institut für Technologie

CAT(0) kubische Komplexe
Wintersemester 14/15

JProf. Dr. Petra Schwer, MSc. Julia Heller

1. Übungsblatt

Ausgabe: 21. Oktober 2014, Abgabe: 31. Oktober 2014

Aufgabe 1
Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit induzierter Metrik.

$a)$ Zeigen Sie, dass für $x, y \in V$ durch

$$\gamma\colon [0, \|y-x\|] \to V, \quad t \mapsto ((\|y-x\| - t) \cdot x + t \cdot y) \cdot \frac{1}{\|y-x\|}$$

eine Geodäte von x nach y definiert ist. Damit ist V ein geodätischer Raum.

$b)$ Zeigen Sie, dass V genau dann eindeutig geodätisch ist, wenn der abgeschlossene Einheitsball $\bar{B}_1(0) \subset V$ *streng konvex* ist. Dabei heißt $\bar{B}_1(0)$ *streng konvex*, wenn für alle $u_1 \neq u_2 \in \mathbb{R}^n$ mit Norm 1 die Ungleichung $\|(1-t)u_1 + tu_2\| < 1$ für alle $t \in (0,1)$ erfüllt ist.

Aufgabe 2
Beschreiben Sie die Geodäten in $(\mathbb{R}^2, d_1)$ und in $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ mithilfe von Bildern.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass Vergleichsdreiecke existieren und bis auf Kongruenz eindeutig sind.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass ein endlicher Graph genau dann ein CAT(0)-Raum ist, wenn er eindeutig geodätisch ist.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$-Bäume CAT(0)-Räume sind.

Aufgabe 6
Sei (X, d) ein geodätischer Raum. Die Metrik d heißt *konvex*, wenn für je zwei Geodäten $c, c'\colon [0,1] \to X$ die Ungleichung

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1-t) \cdot d(c(0), c'(0)) + t \cdot d(c(1), c'(1))$$

für alle $t \in [0,1]$ gilt.
Zeigen Sie, dass die Metrik eines CAT(0)-Raumes konvex ist.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für den Spezialfall $c(0) = c'(0)$.