10. Übungsblatt

Ausgabe: 22. Januar 2015

Definition des Coxeterkomplexes:
Sei $W = \langle S \rangle$ eine Coxetergruppe. Betrachte Untergruppen von W der Form $w\langle S' \rangle$ für ein Element $w \in W$ und eine Teilmenge des Erzeugendensystems $S' \subseteq S$. Diese Untergruppen heißen *spezielle Untergruppen* von W. Die Menge $\Sigma(W, S)$ aller speziellen Untergruppen von W wird mit der durch umgekehrte Inklusion gegebenen Ordnung zu einer partiell geordneten Menge und somit zu einem abstrakten Simplizialkomplex. Der *Coxeterkomplex* wird als die geometrische Realisierung von $\Sigma(W, S)$ definiert und mit Σ oder $\Sigma(W, S)$ bezeichnet.

Aufgabe 1

Es seien die beiden Coxetergruppen $W_1 = \langle s, t | (st)^4 \rangle$ und $W_2 = \langle r, s, t | (rs)^4, (st)^4, (rt)^2 \rangle$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie den Coxeterkomplex $\Sigma_1 = \Sigma(W_1, \{s, t\})$.

(b) Konstruieren Sie den Coxeterkomplex $\Sigma_2 = \Sigma(W_2, \{r, s, t\})$.

(c) Wie findet sich Σ_1 in Σ_2 wieder?

Aufgabe 2

Sei $W = \langle s, t | (st)^m \rangle$ eine Coxetergruppe.

(a) Sei m endlich. Wie viele Elemente besitzt W? Zeigen Sie, dass es genau ein $w \in W$ gibt, das zwei reduzierte Darstellungen besitzt.

(b) Sei m unendlich. Zeigen Sie, dass jedes Element von W genau eine reduzierte Darstellung hat. Wie lassen sich diese Darstellungen charakterisieren?

(c) Skizzieren Sie den Coxeterkomplex von W für den Fall $m = \infty$.

Aufgabe 3

Sei W eine Coxetergruppe mit Erzeugendensystem S und Längenfunktion $l \colon W \to \mathbb{N}_0$.

(a) Wie lassen sich die Elemente von S mithilfe von l charakterisieren?

(b) Zeigen Sie, dass entweder $l(ws) = l(w) + 1$ oder $l(ws) = l(w) - 1$ für alle $s \in S$ und $w \in W$ gilt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die drei Bedingungen **(D)**, **(E)** und **(F)** der Vorlesung für Coxetergruppen gelten und äquivalent sind.