Karlsruher Institut für Technologie

CAT(0) kubische Komplexe
Wintersemester 14/15

JProf. Dr. Petra Schwer, MSc. Julia Heller

3. Übungsblatt

Ausgabe: 31. Oktober 2014, Abgabe: 7. November 2014

Aufgabe 1 (*Alexandrovs Lemma*)
Seien a, b, b' und c vier unterschiedliche Punkte in $\mathbb{R}^2$, so dass b und b' auf verschiedenen Seiten von $[a, c]$ liegen. Betrachte die Dreiecke $\Delta = \Delta(a, b, c)$ mit den Winkeln α, β, γ und $\Delta' = \Delta(a, b', c)$ mit den Winkeln α', β', γ', so dass $\gamma + \gamma' \geq \pi$ ist.

(1) Zeigen Sie, dass $d(b, c) + d(b'c) \leq d(b, a) + d(b', a)$ gilt.

Sei $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}')$ das durch $d(\bar{a}, \bar{b}) = d(a, b)$, $d(\bar{a}, \bar{b}') = d(a, b')$ und $d(\bar{b}, \bar{b}') = d(b, c) + d(c, b')$ definierte Dreieck, die Winkel seien mit $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}'$ bezeichnet. Weiter sei $\bar{c} \in [\bar{b}, \bar{b}']$ derjenige Punkt mit $d(\bar{b}, \bar{c}) = d(b, c)$.

(2) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:
(i) $\bar{\alpha} \geq \alpha + \alpha'$, (ii) $\bar{\beta} \geq \beta$, (iii) $\bar{\beta}' \geq \beta'$ und (iv) $d(\bar{a}, \bar{c}) \geq d(a, c)$.
(v) Ist eine der Ungleichungen $(i) - (iv)$ eine Gleichung, dann auch die anderen und dies ist genau dann der Fall, wenn $\gamma + \gamma' = \pi$ gilt.
Bemerkung: Das Lemma gilt mit leichten Modifikationen in allen Modellräumen M_κ^n.

Aufgabe 2
Sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum und $C_0(Y)$ der flache Kegel über Y mit Kegelmetrik d.

$a)$ Zeigen Sie, dass durch $d_\pi(x, y) = \min\{\pi, d_Y(x, y)\}$ eine Metrik auf Y definiert ist.

$b)$ Stellen Sie die Metrik d_π auf Y durch die Metrik d auf C_0Y dar.

Aufgabe 3
Sei $X = C_0(Y)$ der flache Kegel über einem metrischen Raum Y. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist ein geodätischer Raum.

(ii) Jeder Ball um $0 \in X$ ist konvex.

(iii) Es existiert ein offener, konvexer Ball um $0 \in X$.

(iv) Y ist π-geodätisch.

Dabei heißt ein metrischer Raum (Y, d) *π-geodätisch*, wenn für alle $x, y \in Y$ mit $d(x, y) < \pi$ eine Geodäte von x nach y existiert.

Aufgabe 4
Sei $X = C_0(Y)$ der flache Kegel mit Kegelmetrik d über dem metrischen Raum Y. Es seien $x_1 = t_1 y_1$ und $x_2 = t_2 y_2$ zwei Elemente aus X mit $d(x_1, x_2) = t_1 + t_2$. Zeigen Sie, dass durch

$$c \colon [0, t_1 + t_2] \to X, \quad t \mapsto \begin{cases} (t_1 - t) y_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ (t - t_1) y_2 & t_1 \leq t \leq t_1 + t_2 \end{cases}$$

ein wohldefinierter, geodätischer Pfad von x_1 nach x_2 gegeben ist.