Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. Günter Aumann
Dipl.-Math. Anastasia August

Differentialgeometrie

Übungsblatt 1 **Wintersemester 06/07**

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Auf einem Kreis $k(O, r_1)$ rollt außen eine Kreisscheibe $s(M, r_2)$ ab. P sei ein Punkt auf s und t sei der Winkel zwischen der x_1-Achse und $\overrightarrow{OM}$. Die Ausgangslage für $t = 0$ sei

$$M(r_1 + r_2, 0),\ P_a(r_1 + r_2 - a, 0),\ 0 \leq a \leq r_2.$$

Bestimmen Sie für die von P_a für $0 \leq t < \infty$ beim Abrollen durchlaufene Kurve c_a eine Parameterdarstellung. Für welche a ist c_a bezüglich dieser Parameterdarstellung keine reguläre parametrisierte Kurve? Geben Sie in diesem Fall alle $t \in [0, \infty)$ an, für die c_a nicht regulär ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die durch

$$\tilde{\varphi} : \begin{cases} \mathbb{R} \to E^2 \\ t \mapsto \tilde{X}(t) \end{cases} \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} a\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ b\dfrac{2t}{t^2 + 1} \end{pmatrix},\ (a, b > 0)$$

festgelegte Kurve $\tilde{c}$ eine einfache $C^\infty-$Kurve ist.

b) Vergleichen Sie $\tilde{c}$ mit der durch

$$\varphi^* : \begin{cases} (0, 2\pi) \to E^2 \\ u \mapsto X^*(u) \end{cases} \quad \text{mit } \mathbf{x}^*(u) = \begin{pmatrix} a\cos u \\ b\sin u \end{pmatrix},$$

gegebenen Kurve c^*. Wie hängen $\tilde{c}$ und c^* zusammen?

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Die ebene Kurve $c : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{3}t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

a) Skizzieren Sie die Kurve c.

b) Untersuchen Sie, ob c singuläre Punkte enthält.

c) Berechnen Sie die vom Punkt $X(0)$ aus gemessene Bogenlänge der Kurve.

d) Geben Sie eine implizite Darstellung für c an.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 6.11.2006 um 13:45 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder in der Übung.