Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. Günter Aumann
Dipl.-Math. Anastasia August

Differentialgeometrie

Übungsblatt 2 **Wintersemester 06/07**

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Gegeben sei die Raumkurve

$$k : \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t \\ \sin t \\ \cosh t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die vom Punkt $X(0)$ aus gemessene Bogenlänge s der Kurve.

b) Geben Sie eine Darstellung von k in Bogenlängenparameter an.

c) Bestimmen Sie den Winkel, den die Schmiegebene der Kurve in einem allgemeinen Kurvenpunkt mit der x_1x_2-Ebene bildet. In welchem Kurvenpunkt hat der Winkel den Wert $45°$?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Die Kurve $k : \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4} \\ \frac{t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

a) Ermitteln Sie diejenigen regulären Punkte auf k, in denen die Kurventangente parallel zur Ebene mit der Hesseform $y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 0$ ist.

b) Berechnen Sie im Punkt $X(1)$ der Kurve die Vektoren $\mathbf{t}$, $\mathbf{h}$ und $\mathbf{b}$ des begleitenden Dreibeins.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Eine reguläre C^1-Kurve $c \subset E^3$ heißt Böschungslinie, wenn ihre Tangentialvektoren mit einem festen Vektor $\mathbf{a} \neq 0$ („Böschungsrichtung“) einen konstanten Winkel α („Böschungswinkel“) einschließen (o.E. sei $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

Für die Böschungslinie $c \subset E^3$ beweise man:

a) Ist $\alpha = 0$, so liegt c in einer Geraden.

b) Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so liegt c in einer Ebene des E^3.

c) Die Projektion von c parallel zu $\mathbf{a}$ in eine zu $\mathbf{a}$ orthogonale Ebene ist im Fall $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ eine reguläre C^1-Kurve c^*; für die Bogenlängen gilt: $s^* = s \sin\alpha + \text{const}$.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 13.11.2006 um 13:45 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder in der Übung.