Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. Günter Aumann
Dipl.-Math. Anastasia August

# Differentialgeometrie

**Übungsblatt 4** **Wintersemester 06/07**

---

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

Für eine reelle Zahl $a \neq 0$ sei die parametrisierte Kurve

$$c : \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ at^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Skizzieren Sie die Kurve für $a = 1$. Finden Sie für beliebiges $a \neq 0$ eine in $x$ und $y$ polynomiale Gleichung $F(x, y) = 0$, deren Lösungsmenge mit der Menge aller Kurvenpunkte übereinstimmt.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)

Berechnen Sie für jeden Punkt der Ellipse

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \quad (a, b > 0,\ \ 0 \leq t < 2\pi)$$

den Mittelpunkt $M(t)$ des Krümmungskreises.
Skizzieren Sie die Ortskurve der Krümmungskreismittelpunkte $\mathbf{m}(t)$ und bestätigen Sie, dass $M(t)$ wie im Beispiel aus 2.3 der Vorlesung konstruiert werden kann.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)

('Ein an die Wand gelehnter Besen rutscht langsam ab ...')
Sei $g$ eine Gerade, $A$ ihr Schnittpunkt mit der $x_1-$Achse, $B$ der Schnittpunkt von $g$ mit der $x_2-$Achse, $a > 0$ der Abstand zwischen $A$ und $B$ sowie $\varphi$ der Winkel zwischen $x_1-$Achse und $AB$ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$. Zu dieser Geradenschar gibt es eine Hüllkurve $c$.

(i) Geben Sie eine Darstellung der Geradenschar an.

(ii) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine implizite Darstellung für $c$, das heißt eine Funktion $F(x, y)$, deren Nullstellenmenge alle Kurvenpunkte enthält.

(iii) Für welches $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es für $c$ eine polynomiale implizite Darstellung vom Grad $k$?

---

**Abgabe** der Lösungen bis zum Montag, den 27.11.2006 um 13:45 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder in der Übung.