

Differentialgeometrie

Übungsblatt 7

Wintersemester 06/07

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Berechnen Sie die Fundamentalgrößen erster Art und die Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\mathcal{F} : \mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a \cos u^2 \cos u^1 \\ a \cos u^2 \sin u^1 \\ b \sin u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 < b < a, \quad (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß die auf der Kugel

$$\mathcal{F} : \mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \sin u^2 \cos u^1 \\ \sin u^2 \sin u^1 \\ \cos u^2 \end{pmatrix}, \quad (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi) \quad \text{durch}$$

$$\begin{aligned} u^1(t) &= \ln t \\ u^2(t) &= 2 \arctan t \end{aligned}$$

gegebene Flächenkurve die Meridiane unter dem konstanten Winkel $\frac{\pi}{4}$ schneidet.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Wir betrachten die Einheitssphäre

$$\Sigma : \mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

als Model der Erde und den winkeltreuen **Kartenentwurf von Mercator**

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ \ln \tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Kugelloxodromen (das heißt die Kurven auf der Kugel, die mit den Breitenkreisen einen festen Winkel α einschließen) und deren Bilder auf der Mercator-Karte.
- Ein Kapitän fährt von New York nach Kapstadt auf dem Kurs, den er durch geradliniges Verbinden beider Städte auf der Mercator-Karte ermittelt. Versleichen Sie diese Länge mit der entsprechenden kürzesten Verbindung (auf der Sphäre).

Verwenden Sie:

New York: 74° westl. Länge / $40,5^\circ$ nördl. Breite

Kapstadt: $18,5^\circ$ östl. Länge / 34° südl. Breite

mittlerer Erdradius: 6378 km

Die semesterbegleitende Prüfung zur Vorlesung *Differentialgeometrie* findet am Donnerstag, den 15. Februar als mündliche Prüfung (Dauer 20 bis 30 Minuten) statt.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 18.12.2006 um 13:45 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder in der Übung.