

## Differentialgeometrie

### Übungsblatt 11

Wintersemester 06/07

---

#### Aufgabe 1. (4 Punkte)

Gegeben sei die Kegelfläche mit der Parameterdarstellung

$$\mathcal{F} : \mathbf{x}(u^1, u^2) = u^2 \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ 1 + \sin u^1 \\ 1 \end{pmatrix}, (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times (0, \infty).$$

- Berechnen Sie die Fundamentalgrößen erster Art von  $\mathcal{F}$  und bestimmen Sie die **Orthogonaltrajektorien** der  $u^2$ -Linien (d.h. Flächenkurven, die in jedem Punkt senkrecht auf der entsprechenden  $u^2$ -Linie stehen).
- Zeigen Sie, daß die Kurven aus a) auf Kugeln um die Kegelspitze  $S(0|0|0)$  liegen.
- Berechnen Sie die Fundamentalgrößen zweiter Art von  $\mathcal{F}$  und untersuchen Sie, ob es auf  $\mathcal{F}$  Nabelpunkte gibt.
- Bestimmen Sie das Krümmungsliniennetz von  $\mathcal{F}$  und deuten Sie es mit Hilfe von a) geometrisch.

#### Aufgabe 2. (4 Punkte)

Wir betrachten die durch

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & E^3 \\ (u^1, u^2) & \mapsto & X(u^1, u^2) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r \cos u^1 \\ r \sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, h > 0$$

gegebene Wendelfläche  $\Phi$ .

- Zeigen Sie, dass  $\Phi$  bezüglich  $\varphi$  eine reguläre Fläche ist.
- Zeigen Sie, dass es eine gleichsinnige zulässige Parametertransformation  $f(s, t) \mapsto (u^1(s, t), u^2(s, t))$  gibt mit

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x}(u^1(s, t), u^2(s, t)) = \mathbf{y}(s, t) = \begin{pmatrix} t \cos(s/h) \\ t \sin(s/h) \\ s \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)

Sei  $\Phi : \mathbf{x}(u^1, u^2), (u^1, u^2) \in G \subset \mathbb{R}^2$  eine reguläre  $C^1$ -Fläche des  $E^3$ .

- a) Zeigen Sie: Eine reguläre  $C^1$ -Flächenkurve  $c$  von  $\Phi$  ist genau dann Winkelhalbierende der Parameterlinien, wenn sie der Differentialgleichung

$$g_{11}(\dot{u}^1)^2 - g_{22}(\dot{u}^2)^2 = 0$$

genügt.

- b) Bestimmen Sie für die Winkelhalbierenden der Parameterlinien der Wendelfläche

$$\Phi : \mathbf{y}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^2 \cos u^1 \\ u^2 \sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix}, \quad h > 0$$

eine Parameterdarstellung, indem Sie die Differentialgleichung aufstellen und integrieren.