Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Prof. Dr. Günter Aumann
Dipl.-Math. Anastasia August

Differentialgeometrie

Übungsblatt 13 **Wintersemester 06/07**

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zu $N+1$ Punkten $B_0, B_1, ..., B_N$ sei σ die Symmetrieebene der Punkte B_0 und B_N. Zeigen Sie: Liegen die Punkte B_i und B_{N-i} symmetrisch zu σ $(i = 0, ..., N)$, so ist σ Symmetrieebene von der Bézier-Kurve

$$c : \mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{b}_i B_i^N(u),\ \ u \in [0,1].$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Eine Bézier-Kurve 3. Grades $c : \mathbf{x}(u), u \in [0,1]$ soll für die Parameterwerte $u_i (i = 0,1,2,3)$ durch die Punkte

$$P_0(4|0),\ P_1(2|4),\ P_2(0|5),\ P_3(-2|6)$$

verlaufen. Ermitteln Sie die zugehörigen Bézier-Punkte für den Fall, dass gilt:

a) $u_i = \frac{i}{3},\ i = 0,1,2,3;$

b) $u_i = \frac{L_0^i}{{L_0}^3},\ i = 0,1,2,3$, wobei L_0^i die Länge des Polygonzuges von P_0 nach P_i steht.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Gegeben seien die beiden Bézier-Kurven

$$b : \mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{b}_i B_i^N(u),\ \ u \in [0,1] \text{ und } p : \mathbf{y}(u) = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{p}_i B_i^N(u),\ \ u \in [0,1]$$

mit $B_N = P_0$.

a) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(1) = \dot{\mathbf{y}}(0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{b}_{N-1} - 2\mathbf{b}_N + \mathbf{p}_1 = 0\\
\ddot{\mathbf{x}}(1) = \ddot{\mathbf{y}}(0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{b}_{N-2} - 2\mathbf{b}_{N-1} + 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = 0\\
\dddot{\mathbf{x}}(1) = \dddot{\mathbf{y}}(0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{b}_{N-3} - 3\mathbf{b}_{N-2} + 3\mathbf{b}_{N-1} - 2\mathbf{b}_N + 3\mathbf{p}_1 - 3\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0.
\end{aligned}$$

b) Gelten

$$\mathbf{b}_{N-1} - 2\mathbf{b}_N + \mathbf{p}_1 = 0 \text{ und } \mathbf{b}_{N-2} - \mathbf{p}_2 + c(\mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{p}_1) = 0,\ \ c \in \mathbb{R},$$

so liegt ein G^2-Übergang vor.

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 12.02.2007 um 13:45 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude oder in der Übung.