Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 10 **22. Dezember 2010**

Aufgabe 1 (Paralleltransport tangentialer Flächen)

Es seien M und N Flächen, welche sich entlang einer Kurve tangential berühren, d. h. es gelte $c : I \to M \cap N$ und $T_{c(t)}M = T_{c(t)}N$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie, daß die Paralleltransporte entlang c relativ zu M und N übereinstimmen.

Aufgabe 2 (Paralleltransport auf der Sphäre)

Berechnen Sie den Paralleltransport entlang eines beliebigen Breitenkreises der Sphäre. Betrachten Sie dazu den Kegel, welcher die $\mathbb{S}^2$ entlang des Breitenkreises tangential berührt.

Aufgabe 3 (Kritische Punkte des Längenfunktionals)

Es sei M eine Fläche und $c : I = [0, l] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Eine differenzierbare Abbildung $F : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $F(\,.\,, 0) = c$ nennt man eine *Variation* von c; gilt zudem $F(0, \,.\,) \equiv c(0)$ und $F(l, \,.\,) \equiv c(l)$, so heißt F Variation *mit festen Endpunkten*. Zeigen Sie:

(a) Ist F eine Variation von c, so gilt für das Längenfunktional $L_F(s) = L(F(\,.\,, s))$:

$$\tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} L_F = \big\langle \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} F(l, s) - \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} F(0, s), \dot{c}(t) \big\rangle - \int_0^l \big\langle \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} F(t, s), \ddot{c}(t) \big\rangle dt$$

(b) Die Kurve c ist genau dann eine Geodätische, wenn für jede Variation F von c mit festen Endpunkten $\tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} L_F = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (Geodätische unter lokalen Isometrien)

Es sei ϕ eine lokale Isometrie zwischen Flächen M und N. Zeigen Sie, daß Geodätische von M unter ϕ auf Geodätische von N abgebildet werden.

Wir wünschen Ihnen allen ein schönes Weihnachtsfest und ein glückliches Jahr 2011!

Abgabe der Lösungen in der Übung am 12. Januar 2011.