Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie — **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 11 — **12. Januar 2011**

Aufgabe 1 (Geodätische auf Rotationsflächen)

Es sei
$$\Phi(t,\theta) = \big(\alpha(t)\cos\theta, \alpha(t)\sin\theta, \beta(t)\big)$$
die Rotationsfläche einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß Meridiane und Breitenkreise $t = t_0$ mit $\alpha'(t_0) = 0$ Geodätische sind. Zeigen Sie:

(a) Die übrigen Geodätischen sind von der Form $\gamma(s) = \Phi\big(t(s), \theta(s)\big)$ mit $\alpha(t(s))^2\,\theta'(s) = C_\gamma$, wobei C_γ eine von der Geodätischen abhängige Konstante ist. Ist γ nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt ferner $t'(s)^2 + \alpha(t(s))^2\theta'(s)^2 = 1$.

(b) Was passiert, wenn γ sich einem Breitenkreis vom Radius C_γ nähert?

(c) Es sei nun γ eine Geodätische, aber weder ein Meridian noch ein Breitenkreis. Dann oszilliert γ zwischen den zwei nächstliegenden, γ einschließenden Breitenkreisen mit Radius C_γ, sofern solche existieren und keine Geodätischen sind.

Aufgabe 2 (Geodätische auf dem Rotationsparaboloid)

(a) Parametrisieren Sie das Paraboloid $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x = y^2 + z^2\big\}$ als Rotationsfläche.

(b) Kann es Geodätische wie in Aufgabe 1 (b) geben?

(c) Bestimmen Sie das qualitative Verhalten von Geodätischen, die keine Meridiane sind, und skizzieren oder plotten Sie diese. Zeigen Sie, daß jede Geodätische, welche kein Meridian ist, sich selbst unendlich oft schneidet.

Aufgabe 3 (Oberes Halbebenenmodell der Hyperbolischen Ebene)

Auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 : \Im(z) > 0\}$ seien
$$g_{12}(z) = g_{21}(z) = 0\,, \quad g_{11}(z) = g_{22}(z) = \frac{1}{\Im(z)^2}$$
als eine „erste Fundamentalform“ gegeben. Für jedes $A = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ ist die gebrochen-lineare Transformation
$$h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\,, z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$
ein biholomorpher Diffeomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $A \mapsto h_A$ definiert einen Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ in die Gruppe $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}, g)$ der Isometrien von $\mathbb{H}$ bzgl. g (vgl. Aufgabe 2 Blatt 8).

(b) Für alle $r \in \mathbb{R}$ ist $c(t) = ie^{rt}$ eine Geodätische bzgl. g.

(c) Bestimmen Sie zu jedem $\xi \in \mathbb{C}$ die Geodätische mit $c(0) = i$ und $\dot{c}(0) = \xi$.

Abgabe der Lösungen in der Übung am 19. Januar 2011.