Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 12 **19. Januar 2011**

Aufgabe 1 (Minimalflächen als kritische Punkte des Flächenfunktionals)

Eine Fläche heißt *Minimalfläche*, wenn für ihre mittlere Krümmung $H \equiv 0$ gilt.

Es sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung mit Gaußabbildung N. Ist $\varepsilon : U \times I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\varepsilon(\,.\,,t) \equiv 0$, so heißt die Abbildung $F^t(u) = f(u) + \varepsilon(u,t)N(u)$ eine *normale Variation von* f. Der Flächeninhalt von F^t sei mit $A(F^t)$ bezeichnet.

Zeigen Sie, daß f genau dann eine Minimalfläche ist, wenn $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} A(F^t|_C) = 0$ für jede normale Variation F von f und jedes Kompaktum $C \subset U$ gilt.

Aufgabe 2 (Familie von Minimalflächen)

Für $\rho \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei $\Phi_\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi_\rho(t,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\rho\cosh t\cos\theta + \cos\rho\sinh t\sin\theta \\ \sin\rho\cosh t\sin\theta - \cos\rho\sinh t\cos\theta \\ t\sin\rho + \theta\cos\rho \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(a) Φ_0 ist ein Helikoid und $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ ein Katenoid.

(b) Die Matrixdarstellungen g_{ij} der ersten Fundamentalformen von Φ_ρ stimmen für alle ρ überein. Die Flächen Φ_ρ sind somit lokal isometrisch.

(c) Alle Φ_ρ sind Minimalflächen, d. h. die mittlere Krümmung verschwindet für alle ρ.

Aufgabe 3 (Riemannsche Normalkoordinaten)

Es seien M eine Fläche, $p \in M$ und $v_1, v_2 \in T_pM$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß die Abbildung

$$\phi : \mathbb{B}_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^2 \to M\,,\ (\xi_1,\xi_2) \mapsto \exp_p(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2)$$

eine Parametrisierung einer Umgebung von p in M ist; man bezeichnet ϕ als *Riemannsche Normalkoordinaten*.

(b) Bezüglich der Parametrisierung ϕ gilt $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ und $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$.