Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 13 **26. Januar 2011**

Aufgabe 1 (Gauß-Codazzi-Gleichungen)

Klären Sie, ob offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und Parametrisierungen $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ existieren, so daß

(a)
$$\begin{aligned} g_{11}(u) = 1,\ g_{22}(u) = 1,\ g_{12}(u) = 0 \ \text{ und} \\ h_{11}(u) = 1,\ h_{22}(u) = -1,\ h_{12}(u) = 0 \end{aligned}$$

oder

(b)
$$\begin{aligned} g_{11}(u) = 1,\ g_{22}(u) = \cos^2(u_1),\ g_{12}(u) = 0 \ \text{ und} \\ h_{11}(u) = \cos^2(u_1),\ h_{22}(u) = 1,\ h_{12}(u) = 0 \end{aligned}$$

für jedes $u = (u_1, u_2) \in U$ gilt.

Aufgabe 2 (Konforme Parametrisierungen II)

Es sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ eine konforme Parametrisierung, d. h. $g_{11}(u) = g_{22}(u) = \lambda(u)$ und $g_{12}(u) = g_{21}(u) = 0$ für eine differenzierbare positive Funktion λ; siehe Aufgabe 1 auf Blatt 7.

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\left(\log\lambda\right)_{u_1}, \\ \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\left(\log\lambda\right)_{u_2}, \\ K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta(\log\lambda)\,. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet Δ den Laplace-Operator auf Funktionen.

Aufgabe 3 (Krümmung der hyperbolischen Ebene)

Zeigen Sie, daß die in Aufgabe 3 auf Blatt 11 definierte hyperbolische Ebene konstante Gaußkrümmung $K \equiv -1$ hat.