Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 2 **27. Oktober 2010**

Aufgabe 1 (Krümmungskreis)

Es sei I ein Intervall, $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t_0 \in I$ mit $\kappa_\alpha(t_0) \neq 0$. Wir sagen der Kreis $K(m, r)$ berühre die Kurve α in $t_0 \in I$ in mindestens n-ter Ordnung, falls für $f(t) = \|\alpha(t) - m\| - r$ gilt, daß $f(t_0) = f'(t_0) = \cdots = f^{(n)}(t_0) = 0$.

Es seien $r = \frac{1}{|\kappa_\alpha(t_0)|}$ und $m = \alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa_\alpha(t_0)} n_\alpha(t_0)$, wobei n_α das Normalenfeld längs α bezeichne. Zeigen Sie:

(a) $K(m, r)$ berührt die Kurve α in t_0 in mindestens zweiter Ordnung.

(b) $K(m, r)$ ist der einzige Kreis, welcher α in t_0 in mindestens zweiter Ordnung berührt.

Aufgabe 2 (Kürzeste im $\mathbb{R}^n$)

Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, daß

(a) die Ungleichung $\|c(b) - c(a)\| \leqslant L(c)$ erfüllt ist,

(b) Gleichheit genau dann gilt, wenn die Kurve ein Geradenstück parametrisiert.

Aufgabe 3 (Klothoide)

Es sei $a > 0$. Die Kurve

$$c : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(a\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{t}{a\sqrt{\pi}}} \cos\left(\tfrac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau,\ a\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{t}{a\sqrt{\pi}}} \sin\left(\tfrac{\pi\tau^2}{2}\right) d\tau \right)$$

heißt *Klothoide*.

(a) In welcher Beziehung stehen Bogenlänge und Krümmung der Klothoide?

(b) Skizzieren oder plotten Sie c. Wo und warum wird die Klothoide im Straßenbau verwendet?

Aufgabe 4 (Traktrix)

Die Kurve $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos t + \ln(\tan \frac{t}{2}), \sin t)$ heißt *Traktrix*.

(a) Zeigen Sie, daß alle Tangenten der Traktrix die x-Achse schneiden und die Segmente zwischen dem Berührpunkt mit der Traktrix und dem Schnittpunkt mit der x-Achse alle von gleicher Länge sind. Warum heißt α „*Traktrix*“?

(b) Skizzieren oder plotten Sie die Traktrix und berechnen Sie ihre Krümmung.
