Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 3 **3. November 2010**

Aufgabe 1 (Konvexe Graphen)

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Zeigen Sie, daß die Parametrisierung ihres Graphen $c : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ genau dann konvex ist, wenn entweder $f''(t) \geqslant 0$ für alle $t \in I$ oder $f''(t) \leqslant 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Aufgabe 2 (Drehwinkelfunktion und Umlaufzahl)

In der Funktionentheorie wird für eine geschlossene Kurve $\gamma : I \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$ die Umlaufzahl von γ um p definiert als

$$U_p(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-p} dz \,.$$

Zeigen Sie, daß die in Vorlesung definierte Umlaufzahl $n(c)$ einer nach Bogenlänge parametrisierten geschlossenen Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ mit der Umlaufzahl $U_0(\dot{c})$ übereinstimmt.

Aufgabe 3 (Rektifizierbare Kurven)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für einen stetigen Weg $\alpha : [a, b] \to X$ sei

$$\ell(\alpha) = \sup\Big\{\sum\nolimits_{i=1}^n d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) \;\Big|\; k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\Big\} \,.$$

Der Weg α heißt *rektifizierbar*, wenn $\ell(\alpha)$ endlich ist.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, (x, y) \mapsto \inf\big\{\ell(\alpha) \;\big|\; \alpha \text{ ist rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y\big\}$$

eine Metrik auf X definiert.

(b) Geben Sie einen stetigen, nicht rektifizierbaren Weg $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ an.

(c) Es sei $X = \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß $\ell(c) = L(c)$ für jede stetig differenzierbare Kurve c gilt.
