Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 4 **10. November 2010**

Aufgabe 1 (Parallelkurven)

Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene Kurve. Für $r \in \mathbb{R}$ heißt $c_r(t) = c(t) + rn_c(t)$ eine Parallelkurve zu c.

(a) Geben Sie ein möglichst großes δ an, so daß c_r für alle $r \in [-\delta, \delta]$ eine reguläre Kurve ist.

(b) Bestimmen Sie für $r \in I$ die Länge und die Krümmung von c_r.

(c) Zeigen Sie, daß $\lambda(r) = L(c_r)$ nahe der Null differenzierbar ist und $\lambda'(0) = -2\pi n_c$ gilt.

Aufgabe 2 (Gerade, ebene und sphärische Kurven)

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Zeigen Sie:

(a) Die Krümmung von c ist ist genau dann konstant Null, wenn c auf einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ verläuft.

(b) Es gelte $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Die Torsion von c ist genau dann konstant Null, wenn c in einer Ebene des $\mathbb{R}^3$ verläuft.

(c) Es sei c nach der Bogenlänge parametrisiert und habe nirgends verschwindende Krümmung und Torsion. Das Bild von c liegt genau dann in einer Sphäre vom Radius 1, wenn es eine Stammfunktion ϑ zu τ_c gibt, so daß $\kappa_c(t) \cos \vartheta(t) = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Aufgabe 3 (Lokale Normaldarstellung)

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve und $t_0 \in I$ so, daß $\dot{c}(t_0)$ und $\ddot{c}(t_0)$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} c(t) - c(t_0) = &\big((t - t_0) - \tfrac{1}{6}(t - t_0)^3 \kappa_c^2(t_0)\big)\, e_1(t_0) \\ &+ \big(\tfrac{1}{2}(t - t_0)^2 \kappa_c(t_0) + \tfrac{1}{6}(t - t_0)^3 \dot{\kappa}_c(t_0)\big)\, e_2(t_0) \\ &+ \tfrac{1}{6}(t - t_0)^3 \kappa_c(t_0) \tau(t_0) e_3(t_0) + o\big((t - t_0)^3\big) \end{aligned}$$

Abgabe der Lösungen in der Übung am 17. November 2010.