Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 5 **17. November 2010**

Aufgabe 1 (Tangentialräume und Differentiale)

Es sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$, $p \in M$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine differenzierbare Kurve mit $\mathrm{Bild}(c) \subset M$ und $c(0) = p$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\dot{c}(0) \in T_pM$ und jedes $v \in T_pM$ ist von dieser Form.

(b) Ist $h : M \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so gilt $dh_p(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(h \circ c)(t)$.

(c) Liegt $\mathrm{Bild}(h)$ in einer Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^m$, so liegt $\mathrm{Bild}(dh_p)$ in $T_{h(p)}N$ (d.h. das Differential von h in p ist eine lineare Abbildung von T_pM nach $T_{h(p)}N$).

Aufgabe 2 (Regelflächen)

Es seien $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, $V : I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar und $\psi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^2$, $\psi(s,t) = c(t) + sV(t)$.

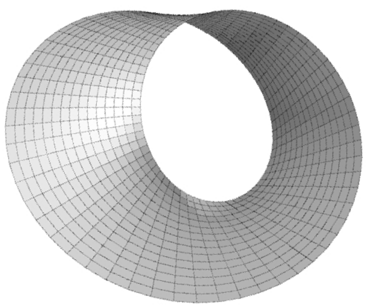
(a) Finden und skizzieren Sie zwei Beispiele.

(b) Wann ist ψ eine parametrisierte Fläche? Das Bild von ψ heißt dann *Regelfläche*.

(c) Zeigen Sie, daß die Tangentialebene einer Regelfläche ψ in $\psi(s,t)$ genau dann unabhängig von s ist, wenn die Vektoren $\dot{c}(t)$, $\dot{V}(t)$, $V(t)$ linear abhängig sind.

Aufgabe 3 (Möbiusband)

Anschaulich erhält man ein Möbiusband, indem man zwei einander gegenüberliegende Kanten eines Papierstreifens erst um 180° gegeneinander verdreht und sie dann miteinander verklebt.



Zeigen Sie, daß ein Möbiusband eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist. Läßt sich diese Fläche orientieren?

Aufgabe 4 (Flächenstücke in Sphären)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Bild}(f)$ genau dann in einer Sphäre liegt, wenn eine C^∞-Funktion $\alpha : U \to \mathbb{R}$ existiert, so daß die Abbildung $u \mapsto f(u) + \alpha(u)N(u)$ auf U konstant ist, wobei $N : U \to \mathbb{R}^3$ die Gaußabbildung von f ist.

Abgabe der Lösungen in der Übung am 24. November 2010.