Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 6 **24. November 2010**

Aufgabe 1 (Lokale Parametrisierungen)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

(a) M ist genau dann eine Fläche, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ besitzt, so daß ein Diffeomorphismus $\Psi : V \to W \subset \mathbb{R}^3$ mit $\Psi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ existiert.

(b) Es sei X ein tangentiales Vektorfeld auf einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$. Dann existiert für alle $p \in M$ eine in $\mathbb{R}^3$ offene Umgebung $V \ni p$ und ein Vektorfeld $\overline{X}$ auf V, so daß $\overline{X}\big|_V = X$ gilt. (Jedes tangentiale Vektorfeld ist lokal die Einschränkung eines Vektorfeldes auf einer offenen Menge des $\mathbb{R}^3$.)

Aufgabe 2 (Rotationsflächen)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $c : I \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir betrachten die zugehörige Kurve in der (x, z)-Ebene und lassen diese um die z-Achse rotieren:

$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (t, \theta) \mapsto \big(\alpha(t)\cos\theta, \alpha(t)\sin\theta, \beta(t)\big)$$

(a) Unter welchen Bedingungen parametrisiert f eine Fläche?

(b) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von f und geben Sie für $[p, q] \subset I$ eine Formel für den Flächeninhalt von $f\big|_{[p,q]\times[0,2\pi]}$ an.

Aufgabe 3 (Vektorfelder und Flußkurven)

Es sei $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Betrachten Sie die Vektorfelder

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} H &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (\partial_x H, \partial_y H)(x,y) && \text{(Gradientenfeld)},\\ X_H &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (\partial_y H, -\partial_x H)(x,y) && \text{(Hamiltonsches Vektorfeld)}. \end{aligned}$$

(a) In welcher geometrischen Beziehung stehen $\operatorname{grad} H$ und X_H?

(b) Wie verhält sich H entlang einer Flußkurve γ von X_H?

(c) Berechnen Sie die Flußkurven zu $\operatorname{grad} H$ und X_H. Skizzieren oder plotten Sie die Vektorfelder und ihre Flußkurven.

Aufgabe 4 (Vollständigkeit von Vektorfeldern)

Berechnen Sie die Flußkurven des Vektorfeldes $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^2, y)$. Ist Y vollständig?