Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 7 **1. Dezember 2010**

Aufgabe 1 (Konforme Parametrisierungen)

Eine Parametrisierung $\Psi : U \to \mathbb{R}^3$ heißt *konform*, oder *winkeltreu*, wenn für alle $u \in U$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$ der euklidische Winkel zwischen v und w mit jenem zwischen $D\Psi\big|_u v$ und $D\Psi\big|_u w$ übereinstimmt. Zeigen Sie:

(a) Eine Parametrisierung ist genau dann konform, wenn in jedem Punkt die Matrixdarstellung ihrer ersten Fundamentalform ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

(b) Die Umkehrungen $f_\pm$ der stereographischen Projektionen

$$P_\pm : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto \frac{1}{1 \mp z}(x,y)$$

sind konform parametrisierte Flächenstücke.

Aufgabe 2 (Krümmung des Zylinders)

Es sei $\Psi(h,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, h)$ eine Parametrisierung des Zylinders.

(a) Zeigen Sie, daß Ψ längentreu ist, d.h. $L(c) = L(\Psi \circ c)$ für alle Kurven $c : I \to \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen und die Gaußkrümmung des Zylinders.

(c) Berechnen Sie für $h_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ die Krümmungen der Raumkurven $\Psi(h_0, \,.\,)$ und $\Psi(\,.\,, \theta_0)$.

Aufgabe 3 (Krümmung von Rotationsflächen und die Pseudosphäre)

Es sei $f(t,\theta) = \big(\alpha(t)\cos\theta, \alpha(t)\sin\theta, \beta(t)\big)$ die Rotationsfläche einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve. Zeigen Sie:

(a) Die partiellen Ableitungen f_t, f_θ sind Eigenvektoren der Weingartenabbildung.

(b) Die Gaußkrümmung von f ist gegeben durch

$$K(t,\theta) = -\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)}\,.$$

(c) Bestimmen Sie die Gaußkrümmung der durch Rotation der Traktrix um die x-Achse definierten Fläche.

Abgabe der Lösungen in der Übung am 8. Dezember 2010.