Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Sebastian Grensing

Differentialgeometrie — **Wintersemester 2010 / 2011**

Übungsblatt 8 — **8. Dezember 2010**

Aufgabe 1 (Torsen)

Es seien $c, V : I \to \mathbb{R}^3$ regulär und $\Phi : U \subset \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto c(t) + sV(t)$ die zugehörige Regelfläche. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mathrm{II}(\partial_s\Phi, \partial_s\Phi)\big|_{(s,t)} = 0$ für alle s,t; speziell also $K \leqslant 0$.
(Die Gerade $s \mapsto \Phi(s,t)$ ist eine *Asymptotenlinie.*)

(b) Es sind äquivalent:

(i) Für alle $t \in I$ ist der Normalenvektor längs $s \mapsto \Phi(s,t)$ konstant.

(ii) $\partial_s\partial_t\Phi$ ist linear abhängig von $\partial_s\Phi$ und $\partial_t\Phi$.

(iii) $K \equiv 0$

(Eine Regelfläche, welche eine der drei äquivalenten Bedingungen erfüllt heißt *Torse.*)

Aufgabe 2 (Lokale Isometrie)

Es seien M_1 und M_2 Flächen und $\phi : M_1 \to M_2$ ein lokaler Diffeomorphismus. Die Abbildung ϕ heißt *lokale Isometrie*, wenn jeder Punkt $p \in M_1$ eine offene Umgebung V besitzt, so daß für alle Kurven $c : I \to V$ gilt: $L(\phi \circ c) = L(c)$. Es bezeichne g^i die erste Fundamentalform von M_i. Die *mit ϕ zurückgezogene Bilinearform* ist für $v, w \in T_pM_1$ durch

$$(v,w) \mapsto g^2_{\phi(p)}\big(D\phi\big|_p(v), D\phi\big|_p(w)\big)$$

definiert und wird mit ϕ^*g^2 bezeichnet. Zeigen Sie, daß ϕ genau dann eine lokale Isometrie ist, wenn $\phi^*g^2 = g^1$ gilt.

Aufgabe 3 (Helikoid und Katenoid)

Für $a \neq 0$ heißt $\Phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (a\cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$ *Katenoid* und $\Psi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, au)$ *Helikoid* (oder auch *Wendelfläche*). Berechnen Sie die ersten Fundamentalformen und zeigen Sie, daß das Katenoid und das Helikoid lokal isometrisch sind.