Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie — **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 1 — **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Skalarprodukt und Vektorprodukt. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

(a) Für beliebige λ, $\mu \in \mathbb{R}$ gilt $\langle z, \lambda \cdot x + \mu \cdot y\rangle = \lambda\langle z, x\rangle + \mu\langle z, y\rangle$.
Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch für den Fall dass $z \perp x$ und $z \perp y$.

(b) Es gilt $|x| = |y|$ genau dann, wenn $(x + y) \perp (x - y)$. Geben Sie eine geometrische Veranschaulichung dieser Aussage an.

(c) $|x \times y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2$

(d) $\langle x, y \times z\rangle = \langle y, z \times x\rangle$

(e) x und y sind genau dann linear abhängig, wenn $x \times y = 0$. Begründen Sie, warum im Falle $z \perp x$ und $z \perp y$ die Vektoren z und $x \times y$ linear abhängig sind.

Aufgabe 2. Gerade und Ebene. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die Punkte $A(1, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, 1, 0)$ und $D(1, -1, 1)$.

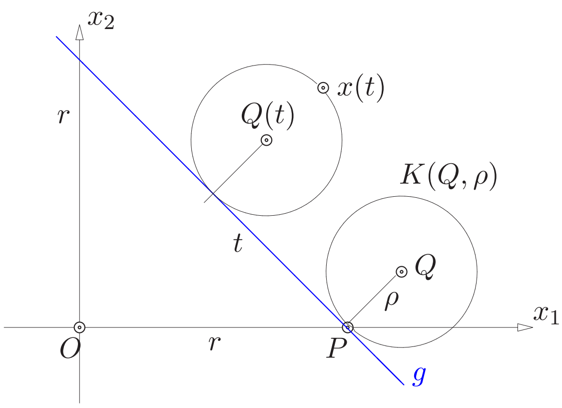
(a) Zeigen Sie, dass die Geraden AB und CD sich schneiden und bestimmen Sie den Schnittpunkt S.

(b) Geben Sie die Ebene E an, die die vier Punkte enthält und bestimmen Sie die Lotgerade auf E im Punkt S.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E und berechnen Sie den Abstand des Nullpunktes von E.

(d) Geben Sie eine Parameterdarstellung einer Geraden g an, die durch S geht und mit E den Winkel 45° einschließt.

Aufgabe 3. Kurve einer Rollbewegung. **(4 Punkte)**



Auf der Geraden g durch die Punkte $(r, 0)$ und $(0, r)$ rollt – wie in der obigen Skizze veranschaulicht – ein Kreis $K = K(Q, \rho)$ ab.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $x : [0, \sqrt{2}r] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ für diejenige Kurve, welche der auf K liegende Punkt P bei dem Rollvorgang beschreibt. Ausgangslage sei dabei $x(0) = (r, 0)$, und t der Abstand zwischen $(r, 0)$ und dem Berührpunkt des rollenden Kreises K mit g.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 26.10.2009 in der Übung.