Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 2 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Parametrisierung nach Bogenlänge. **(4 Punkte)**

Geben Sie für folgende Kurven $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ die Bogenlänge $s(t) := \int_a^t |x'(u)|\, du$ an, und parametrisieren Sie die Kurven nach Bogenlänge:

(a) $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(1 + \cosh t, \cos t, 1 - \sin t\big)$

(b) $x : [0, 2] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(\frac{1}{2}t^2, 2t, \frac{4}{3}t^{3/2}\big)$

Aufgabe 2. Kettenlinie und Traktrix. **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Kurven regulär sind und berechnen Sie jeweils ihre Länge sowie den Tangenteneinheitsvektor in jedem Punkt.

(a) *Kettenlinie:*

$$x : [-8, 8] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, \cosh t, 0)\,.$$

Diese Kurve erhält man als Gleichgewichtslage eines an zwei Punkten befestigten (idealen) Seiles (dies wurde 1690 von Johann Bernoulli entdeckt).

(b) *Traktrix:*

$$x : (0, 8) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \Big(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0\Big)\,.$$

Aufgabe 3. Zykloide. **(4 Punkte)**

Rollt ein Kreis K vom Radius $\rho > 0$ auf einer Geraden, so beschreibt ein fester Punkt auf K eine ebene Kurve, die *Zykloide* genannt wird. Eine mögliche Parametrisierung für eine solche Zykloide ist gegeben durch

$$x : [0, 10] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(10 - t + \rho + \rho\sin(t/\rho) - \rho\cos(t/\rho), t + \rho - \rho\sin(t/\rho) - \rho\cos(t/\rho), 0\big)\,.$$

Dies ist die in Aufgabe 3 des 1. Übungsblattes beschriebene Kurve für den Fall $r = 5\sqrt{2}$.

(a) Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor und die Krümmung in jedem Punkt der Kurve.

(b) Berechnen Sie die Länge von x.

Hinweis: Die Formel für die Krümmung in beliebigen Parametern lautet

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \times x''(t)|}{|x'(t)|^3}\,.$$

Sie können außerdem die Gleichung $1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$ verwenden.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 02.11.2009 in der Übung.